Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Уральский государственный университет
им.А.М.Горького

Н.Ф.Сесекин

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Екатеринбург
1997

УДК 512.64 (075.8)
С 333

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Уральского государственного университета им. А.М.Горького

Сесекин Н.Ф. Основы линейной алгебры: Учеб. пособие. 3-е изд., перераб. и доп. Екатеринбург: УрГУ, 1997. 104 с.

Пособие посвящено изложению основных идей и методов линейной алгебры. В нем отражены почти все традиционные разделы линейной алгебры: матрицы и определители, линейные пространства и линейные отображения, линейные операторы унитарных и евклидовых пространств, квадратичные формы. Упражнения, примеры и задачи способствуют более глубокому познанию основных понятий и результатов.

Пособие предназначено для слушателей факультета повышения квалификации преподавателей математики вузов, а также для студентов при подготовке к государственным экзаменам.

Научный редактор
д-р физ.-мат. наук, проф.
Ю.М.Важенин

Рецензенты: каф. алгебры и теории чисел Урал. гос. пед. ун-та; д-р физ.-мат. наук, проф., ст. науч. сотр. отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН **А.И.Старостин**

ISBN 5-230-06780-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Вместо введения 7

Глава 1
Матрицы и определители 8

§1.1. Матрицы и операции с ними 8

§1.2. Определители 2-го и 3-го порядка 11

§1.3. Перестановки 13

§1.4. Определители n-го порядка : определение и основные свойства 14

§1.5. Миноры и алгебраические дополнения 19

§1.6. Определитель произведения двух квадратных матриц 20

§1.7. Обратная матрица и теорема Крамера 22

Задачи 24

Глава 2
Линейные пространства 27

§2.1. Аксиомы и примеры 27

§2.2. Линейная зависимость 29

§2.3. Подпространства 30

§2.4. Конечномерные пространства 32

Задачи 35

Глава 3
Линейные отображения 38

§3.1. Пространство линейных отображений 38

§3.2. Ядро и область значений 41

§3.3. Произведение линейных отображений 43

§3.4. Инвариантные подпространства и
собственные векторы линейных операторов 45

§3.5. Нормальные формы 50

Задачи 54

Глава 4
Евклидовы и унитарные пространства 57

§4.1. Аксиомы и примеры 57

§4.2. Длина и ортогональность 58

§4.3. Конечномерные евклидовы пространства 60

§4.4. Определитель Грама и теорема об ортогональном
дополнении 61

§4.5. Унитарные пространства 68

Задачи 70

Глава 5
Линейные операторы унитарных и евклидовых пространств 72

§5.1. Сопряженный оператор 72

§5.2. Нормальный оператор 73

§5.3. Нормальные операторы евклидовых пространств 78

§5.4. Псевдорешения и псевдообращения 82

Задачи 89

Глава 6
Квадратичные формы 93

§6.1. Определение и сопутствующие понятия 93

§6.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов 94

§6.3. Положительно определенные вещественные квадратичные формы 97

§6.4. Пары форм 100

Задачи 101

Литература 103

Основные обозначения 103

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено слушателям факультета повышения квалификации преподавателей математики в вузах при Уральском государственном университете. Оно рассчитано на расширение и углубление познаний в области линейной алгебры. Пособие содержит сжатое, но достаточно полное изложение основных идей и методов линейной алгебры и охватывает почти все ее традиционные разделы. Упражнения в тексте и приведенные в конце каждой главы задачи,носящие в основном теоретический характер, способствуют не только более глубокому усвоению основных понятий и результатов, но и расширяют познания в области линейной алгебры.

В отличие от учебника для студентов пособие рассчитано на читателя, в основном знакомого с элементами линейной алгебры. Отсюда сжатость и лаконичность изложения материала, требующие от читателя определенных усилий и опыта в понимании математических категорий.

Пособие состоит из шести глав, каждая глава разбита на параграфы. Внутри параграфа леммы, теоремы,следствия и упражнения имеют свою нумерацию. Для сокращения в ряде мест используются простейшие логические символы. Определения используемых в пособии теоретико-множественных понятий и обозначения приведены в начале пособия. Список основных обозначений приведен в конце пособия.

Основой пособия явился курс лекций,читавшийся автором слушателям ФПК Уральского университета.

Автор признателен научному редактору Ю.М.Важенину: беседы с ним, его советы нашли позитивное отражение в настоящем издании. Компьютерный набор пособия с большим старанием выполнила сотрудница ФПК УрГУ М.Н.Гаева. Выражаю Марине Николаевне сердечную благодарность. Благодарю А.А.Булатова, который оказал большую помощь в наборе наиболее сложных мест текста пособия.

В настоящее, третье, издание пособия включена глава, посвященная матрицам и определителям. Модифицированы доказательства некоторых теорем, дополнены разделы, посвященные задачам.

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

В основе изложения линейной алгебры лежат понятия множества и его элемента, которые являются первичными и потому не сводятся к ранее определенным понятиям. Здесь приводятся обозначения и некоторые понятия, связанные с понятием множества и операциями над множествами.

1) Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A. Множество задается либо перечислением его элементов $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, либо указанием определяющего свойства; так, запись $\{x; P(x)\}$ обозначает множество таких объектов x, которые обладают свойством P.

2) Если любой элемент множества A является элементом множества B, то A называется подмножеством B и пишется $A \subseteq B$. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то A и B называются равными, в записи $A = B$.

3) Объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ множеств A и B определяются равенствами

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ или } x \in B\}; \quad A \cap B = \{x; x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если задано семейство множеств $\{A_i;\ i \in I\}$, то, естественно, определяются объединение $\cup A_i\ i \in I$ и пересечение $\cap A_i\ i \in I$ множеств заданного семейства.

4) Запись $f: X \to Y$ означает, что f есть отображение множества X в множество Y, т.е. каждому элементу x из X f приводит в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$. Если $A \subseteq X$, то образ A при отображении f, обозначаемый через $f(A)$, определяется формулой $f(A) = \{f(a);\ a \in A\}$. Если $B \subseteq Y$, то полный прообраз B, обозначаемый через $f^{-1}(B)$, определяется формулой $f^{-1}(B) = \{x; x \in X : f(x) \in B\}$, в частности, если $b \in Y$, $f^{-1}(b) = \{x, x \in X f(x) = b\}$.

5) Пусть $f: X \to Y$ и $f(X) = Y$, в этом случае говорят, что f есть отображение X на Y. Если $f^{-1}(y)$ для каждого элемента y из Y состоит лишь из одного элемента множества X, то f называют взаимно однозначным отображением или биекцией X на Y. В этом случае f^{-1} будет биекцией Y на X, отображение f^{-1} называют обратным к f.

6) Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Отображение, сопоставляющее элементу x из X элемент $g(f(x))$ из Z, называют произведением (суперпозицией) отображений f и g и обозначают $g \cdot f : (g \cdot f)(x) = g(f(x))$. Если $h: Z \to U$, то легко показать, что $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$.

7) Через $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ обозначают декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е. множество всех n-ок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где

$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{x; x = (a_1, a_2, \ldots, a_n); a_1 \in A_1, a_2 \in A_n, \ldots, a_n \in A_n\}$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартово произведение $A \times A \times \ldots \times A$ обозначают через A^n и называют n-й декартовой степенью множества A.

ГЛАВА 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1.1. Матрицы и операции с ними

Прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) 1 \le i \le m$ и n столбцов

$$a^k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \ldots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}, 1 \le k \le n,$$

элементы которой α_{ik} принадлежат некоторому множеству K, называется *матрицей* над K размера $m \times n$; кратко $(m \times n)$ -матрицей.$(n \times n)$-матрица называется *квадратной* порядка n. Множество всех $(m \times n)$-матриц над K обозначим через $K^{m \times n}$. Чаще всего в качестве K выступают поле (в частности, числовое поле) или какое-либо ассоциативное кольцо. Матрицы $A = (\alpha_{ik})$ и $B = (\beta_{ik})$ из $K^{m \times n}$ называются равными, если $\alpha_{ik} = \beta_{ik}, 1 \le i \le m, 1 \le k \le n$.

Пусть F - поле и $A \in F^{m \times n}, B \in F^{m \times n}$. *Суммой* матриц A и B называют матрицу $(\alpha_{ik} + \beta_{ik})$ из $F^{m \times n}$ и обозначают $A+B$: $(\alpha_{ik} + \beta_{ik}) = A + B$.

Теорема 1. Если A, B и C - матрицы из $F^{m \times n}$, тогда

1. $A + B = B + A$ - коммутативность сложения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - ассоциативность сложения.

3. Для матрицы O, состоящей из нулей, справедливо равенство $A + O = A$ для любой матрицы A.

4. Для любой матрицы A существует противоположная $-A$, такая, что $A + (-A) = O$.

Произведением матрицы $A = (\alpha_{ik})$ на элемент λ поля F называют матрицу $(\lambda\alpha_{ik})$ и обозначают $\lambda A : (\lambda\alpha_{ik}) = \lambda A$.

Теорема 2. Если A, A_1, A_2 - матрицы из $F^{m \times n}$, λ_1, λ_2 - элементы поля F, 1 - единица F, тогда

$$1.\ (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A;\ 2.\ \lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2;$$

$$3.\ \lambda_1\ (\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A;\ 4.\ 1 \cdot A = A.$$

Доказательства перечисленных в теоремах 1 и 2 свойств прямо следуют из определений и соответствующих свойств в поле.

Для введения умножения матриц определим сначала произведение строки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и столбца $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ по формуле $\xi\eta = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$.

Пусть теперь $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times p}$, $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$, $1 \le i \le m$ - строки матрицы A, $b^k = \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{pmatrix}$, $1 \le k \le p$ - столбцы матрицы B.

Произведением матрицы A на матрицу B называют матрицу $C = (\gamma_{ik})$ из $F^{m \times p}$, где $\gamma_{ik} = a_i \cdot b^k = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk}$ и обозначают $A \cdot B$. Таким образом,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b^1 & a_1 \cdot b^2 & \ldots & a_1 \cdot b^p \\ a_2 \cdot b^1 & a_2 \cdot b^2 & \ldots & a_2 \cdot b^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \cdot b^1 & a_m \cdot b^2 & \ldots & a_m \cdot b^p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим примеры: 1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, 4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ и $BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Таким образом, свойство коммутативности даже при умножении квадратных матриц не имеет места.

Теорема 3. Пусть A, A_1, A_2 - матрицы из $F^{m\times n}$; B, B_1, B_2 - матрицы из $F^{n\times p}$ и C - матрица из $F^{p\times q}$, тогда

$$1.\ (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B;$$

$$2.\ A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$3.\ \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$$

$$4.\ (AB)C = A(BC).$$

Равенства, приведенные в теореме, доказываются путем сравнения соответствующих элементов матриц, стоящих в левой и правой частях. Для примера покажем справедливость равенства 2. Пусть a_i - i-я строка матрицы A, b_1^k и b_2^k - k-е столбцы соответственно матриц B_1, B_2, $A(B_1 + B_2) = (\lambda_{ik})$ и $AB_1 + AB_2 = (\delta_{ik})$. Для строки ξ и столбцов η_1 и η_2 равенство $\xi(\eta_1 + \eta_2) = \xi\eta_1 + \xi\eta_2$ очевидно. Тогда $\lambda_{ik} = a_i(b_1^k + b_2^k) = a_ib_1^k + a_ib_2^k = \delta_{ik}$. Что и требовалось.

Следствие. Множество $F^{n\times n}$ всех квадратных матриц порядка n над полем F относительно сложения и умножения является ассоциативным кольцом с единицей.

Единицей кольца $F^{n\times n}$ является матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные - нулю. Такая матрица называется единичной и обозначается E и E_n, где n - ее порядок.

Для произвольной матрицы A матрица A^{T}, полученная из A заменой строк ее столбцами, называется *транспонированной* к A.

Теорема 4. Для любых матриц A и B имеют место равенства

$$1. (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A; \qquad 2.\ (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};$$

$$3. (\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}; \qquad 4.\ (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

Первое равенство очевидно. Легко проверяется выполнимость равенств 2 и 3. Докажем справедливость равенства 4. Пусть $A = (\alpha_{ik}) \in F^{m\times n}$; $B = (\beta_{ik}) \in F^{n\times p}$; $A \cdot B = (\lambda_{ik})$; $(AB)^{\mathrm{T}} = (\delta_{ik}) \in F^{p\times m}$ и, наконец, $B^T A^{\mathrm{T}} = (\eta_{ik}) \in F^{p\times m}$. Так, $\delta_{ik} = \lambda_{ki}$, то $\delta_{ik} = \alpha_{k1}\beta_{1i} + \alpha_{k2}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{km}\beta_{mi}$. Левая часть равенства есть $\eta_{ik} : \delta_{ik} = \eta_{ik}$. Что и требовалось.

§1.2. Определители 2-го и 3-го порядка

Поводом для введения понятия определителя послужила задача о решении системы линейных уравнений. Сначала рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$a_1x + b_1y = c_1; \qquad a_2x + b_2y = c_2. \tag{1}$$

Исключая неизвестную y, а затем и неизвестную x, получим новую систему

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1; \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = d_1c_2 - a_2c_1, \tag{2}$$

вообще говоря, не равносильную системе(1), но полезную для анализа решений системы (1).В системе (2) коэффициенты при x и y равны $a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta$, а правые части похожи по форме на Δ.

Двучлен $a_1b_2 - a_2b_1$ называют *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ и обозначают

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Для решения линейной системы трех уравнений

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1; \quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2; \tag{3}$$

$$a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3$$

умножим первое уравнение на $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, второе на $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, третье на $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ и сложим. Получим

$$\left(a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)x =$$

$$d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Коэффициенты при y и z, как легко проверить, равны нулю. Коэффициент $\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ при x называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = A$ и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = detA = |A|.$$

Аналогично, исключая неизвестные z, x и x, y, получим систему

$$\Delta \cdot x = \Delta_1, \quad \Delta \cdot y = \Delta_2 \ , \ \Delta \cdot z = \Delta_3, \tag{5}$$

где Δ_k - определитель, полученный из определителя Δ заменой $k-$го столбца $k \in \{1, 2, 3\}$ столбцом свободных членов системы (3). Если $\Delta \neq 0$, то отношения $\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ и $\frac{\Delta_3}{\Delta}$ решают не только систему (5),но и (что легко проверить) являются решениями системы(3). Отмеченная полезность определителя матрицы третьего порядка для решения системы (3) показывает, что необходимо указать способы формирования каждого из шести слагаемых этого определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \tag{6}$$

Такая запись определителя 3-го порядка показывает, что слагаемые со знаком "+", соответственно со знаком "-" составляются в соответствии со схемами (правило треугольников)

Второй способ записи слагаемых определителя связан с двухиндексной нумерацией элементов определителя. В соответствии с равенством (6), располагая множители в порядке возрастания первых индексов, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, слагаемые определителя в равенстве (7) однозначно определяются перестановками множества $\{1,2,3\}$:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \Longleftrightarrow (a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}),$$

причем знак слагаемого определяется числом беспорядков в перестановке вторых индексов при натуральном расположении первых индексов. Слагаемые с четным числом беспорядков вторых индексов (1 2 3),(2 3 1), (3 1 2) снабжаются знаком плюс с нечетным числом беспорядков : (3 2 1),(2 1 3),(1 3 2) - знаком минус .

Подмеченная закономерность записи слагаемых определителя 3-го порядка дает возможность подойти к введению понятия определителя n-го порядка. Для этого изучим элементы теории перестановок.

§1.3. Перестановки

В основе теории перестановок - множество n первых натуральных чисел: $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Элементы M, записанные в определенном порядке $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha$, называют *перестановкой* множества M. Пара (α_i, α_k) элементов перестановки α образует *инверсию*, если при $i < k$ $\alpha_i > \alpha_k$. Число всех инверсий в перестановке α обозначим через $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Перестановка с четным числом инверсий называется *четной*, в противном случае - *нечетной*. Перемена местами *двух* элементов в перестановке называется *транспозицией* в этой перестановке.

Теорема 1. Если в перестановке α проделать одну транспозицию, то число инверсий в полученной перестановке β отличается от числа инверсий в перестановке α на нечетное число:

$$S(\beta) = S(\alpha) + 2k + 1,$$

где k - некоторое целое число.

Доказательство. Запишем перестановку α, выделив переставляемые элементы p и q :

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k p \beta_1, \dots . \beta_\ell q \gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

$$\text{Тогда} \quad \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, q, \beta_1, \dots, \beta_\ell, p, \gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

Очевидно, что до и после транспозиции число инверсий, которые образуют p и q с числами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, остается неизменным. При $\ell = 0$ $S(\beta) = S(\alpha) \pm 1$. Если $\ell > 0$, через ℓ_1 обозначим число чисел среди $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$, которые с p не имеют инверсий, а через ℓ_2 - число чисел среди $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$, которые с q не имеют инверсии. Тогда

$$S(\beta) = S(\alpha) + \ell_1 - (\ell - \ell_1) + \ell_2 - (\ell - \ell_2) \pm 1.$$

Следовательно, $S(\beta) = S(\alpha) + 2k \pm 1$, где $k = \ell_1 + \ell_2 - \ell$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если в перестановке α проделать k транспозиций, то полученная перестановка будет иметь ту же четность, что и α, если k - четно, и противоположную, если k - нечетно.

Методом индукции по числу переставляемых элементов нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. 1. Число всех перестановок n элементов равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,.$$

2. Совокупность всех $n!$ перестановок можно упорядочить таким образом, что каждая следующая получается из предыдущей путем одной транспозиции.

Следствие. Число четных перестановок n элементов равно числу нечетных перестановок и равно $\frac{1}{2}n!$.

§1.4. Определители n-порядка: определение и основные свойства

Пусть A-квадратная матрица порядка n над полем F :

$$A = (a_{ik}).1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n.$$

Определителем матрицы A (определителем порядка n) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки, и каждого столбца. Множители в таком произведении записываются в порядке возрастания первых индексов, а произведение снабжается знаком плюс , если перестановка вторых индексов четная, и знаком минус - в противном случае. Очевидно, построенный многочлен от n^2 переменных a_{ik} содержит $n!$ слагаемых, половина из которых входит со знаком плюс . В буквенных обозначениях имеем

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}.$$

Теорема 1. Если i–я строка $a_i, 1 \leq i \leq n$ определителя Δ есть сумма двух строк a'_i и a''_i, то Δ равен сумме двух определителей Δ' и Δ'', причем i-я строка в первом есть a'_i и a''_i-во втором, а остальные строки этих определителей те же, что и в определителе Δ.

Доказательство. По определению

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (a'_{i\alpha_i} + a''_{i\alpha_i}) \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1\ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a'_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1\ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a''_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}.$$

Очевидно, первая сумма равна $\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \Delta'$, а вторая равна $\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a''_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} =$ Δ''. Доказанное свойство, называемое свойством *аддитивности* определителя относительно любой его строки, может быть записано в виде формулы

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_i + a''_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a''_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

и обобщено на случай, когда i-я строка есть сумма нескольких слагаемых.

Теорема 2. Если все элементы i-й строки a_i определителя обладают общим множителем: $a_i = \lambda a'_i$, то λ можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a'_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

Это свойство называется свойством *однородности* и доказывается аналогично доказательству свойства аддитивности.

Теорема 3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Доказательство. Пусть у определителя $\Delta = |a_{ik}|$ i−я и j−я строки равны: $a_i = a_j$, т.е $a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$; можно считать, что $i < j$. Возьмем произвольное слагаемое определителя:

$$(-1)^{S(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{j\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}.$$

Рассмотрим еще одно слагаемое определителя Δ :

$$(-1)^{S(\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots\alpha_i\ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{j\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}.$$

Так как $a_{i\alpha_i} = a_{j\alpha_i}$ и $a_{j\alpha_i} = a_{i\alpha_j}$, то множители взятых слагаемых одни и те же, а снабжены они противоположными знаками. Следовательно, слагаемые эти уничтожаются. Но первое слагаемое взято произвольно, поэтому $\Delta = 0$.

Что и требовалось. Последующие свойства определителей n-го порядка легко следуют из теорем 1,2,3.

Следствие 1. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.

Следствие 2(теорема Якоби). Если к элементам j-й строки определителя Δ прибавить соответствующие элементы i-й строки $i \neq j$, умноженные на некоторый скаляр из F, то полученный определитель равен исходному Δ.

Следствие 3. Если в определителе Δ поменять местами две строки, то полученный определитель Δ_1 отличается лишь знаком от Δ : $\Delta_1 = -\Delta$.

Доказательство. Пусть в определителе Δ a_i и a_j - переставляемые строки. Требуемое утверждение непосредственно следует из легко проверяемого равенства:

$$0=\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i+a_j \\ \vdots \\ a_i+a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

Лемма(о знаке слагаемого определителя).

Произведение $a_{\beta_1\gamma_1}a_{\beta_2\gamma_2}\cdot\ldots\cdot a_{\beta_n\gamma_n}$, где $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – перестановки чисел $1,2,\ldots,n$, входит слагаемым в определитель $\Delta=|a_{ik}|$ со знаком $(-1)^{S(\beta)+S(\gamma)}$.

Доказательство. Для того чтобы узнать знак, с которым произведение $a_{\beta_1\gamma_1}\cdot\ldots\cdot a_{\beta_n\gamma_n}$ входит слагаемым в Δ, необходимо перестановкой сомножителей расположить их в порядке возрастания первых индексов; тогда искомый знак определится числом инверсий вторых индексов. Перестановка двух сомножителей сопровождается транспозициями как первых, так и вторых индексов. Поэтому сумма $S(\beta)+S(\gamma)$ меняется при этом на четное число. Следовательно, $(-1)^{S(\beta)+S(\gamma)}$ не изменяется при любом изменении порядка сомножителей. Располагая в исходном произведении множители в порядке возрастания первых индексов, получим равенство

$$a_{\beta_1\gamma_1}a_{\beta_2\gamma_2}\cdot\ldots\cdot a_{\beta_n\gamma_n}=a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}.$$

Тогда

$$(-1)^{S(\beta)+S(\gamma)}=(-1)^{S(1,2,\ldots,n)+S(\alpha)}=(-1)^{S(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}.$$

Что и требовалось.

Теорема 4 (о транспонированном определителе). Для любой квадратной матрицы A имеет место равенство $|A^T|=|A|$.

Доказательство. Так как номера строк матрицы A – это номера столбцов матрицы A^T и номера столбцов матрицы A - это номера строк матрицы A^T, то слагаемое $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ входит слагаемым как определителя $|A|$, так и определителя $|A^T|$ с одним и тем же знаком $(-1)^{S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+S(\beta_1\ldots\beta_n)}$. Что и требовалось.

Следствие. Свойства определителя n-го порядка, установленные в теоремах 1,2,3 и следствиях 1,2,3, справедливы и для столбцов определителя.

Применение свойств определителей к вычислению конкретных определителей требует определенной изобретательности. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить нижний треугольный определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \dots & a_{n_n} \end{vmatrix}.$$

Так как $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ - единственное слагаемое в Δ_n, которое может быть отлично от нуля, то $\Delta_n = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Пример 2. Вычислить определитель D_n порядка n вида

$$D_n = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \beta & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & \beta \end{vmatrix}.$$

Прибавим все строки D_n к первой. Получим

$$D_n = (\beta + (n-1)\alpha) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \beta & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & \beta \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на $-\alpha$ и прибавим ко всем остальным.

$$D_n = (\beta + (n-1)\alpha) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \beta - \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta - \alpha \end{vmatrix} = (\beta + (n-1)\alpha)(\beta - \alpha)^{n-1}.$$

Пример 3. Вычислить определитель Вандермонда:

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Так как $W_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1$, $W_3(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$, то возникающее предположение

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

можно подтвердить методом математической индукции, предварительно получив рекуррентное равенство

$$W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \cdot W_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

§1.5. Миноры и алгебраические дополнения

Минором M_{ik} элемента a_{ik}, $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$, определителя $\Delta = |a_{ik}|$ n-го порядка называют определитель $n-1$-го порядка, полученный из Δ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца. *Алгебраическим дополнением* A_{ik} к элементу a_{ik} определителя Δ называют минор M_{ik} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$; $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Лемма. Если в определителе Δ все элементы i-й строки, кроме, быть может, a_{ik}, равны нулю, то $\Delta = a_{ik}A_{ik}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $i = k = 1$. По определению имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & nn \end{vmatrix} = \sum_{(1\alpha_2\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(1,\alpha_2\ldots\alpha_n)} a_{11}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} =$$

$$= a_{11} \sum_{(\alpha_2\ldots\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_2\ldots\alpha_n)} a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

Пусть теперь i и k - любые $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$. Переместим a_{ik} в данном определителе в левый верхний угол. Для этого i-ю строку поменяем последовательно со всеми выше стоящими, затем аналогичную процедуру проделаем с k-м столбцом. Определитель обретает множитель $(-1)^{i-1+k-1}$, и, учитывая рассмотренный случай, получим $\Delta = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik}A_{ik}$. Что и требовалось.

Теорема (о разложении определителя по элементам строки). Сумма произведений элементов i-й строки определителя $\Delta = |a_{ik}|$ на их алгебраические дополнения равна этому определителю:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \Delta., 1 \le i \le n.$$

Доказательство. i-ю строку a_i представим в виде

$$a_i = (a_{i1} + 0 + \ldots + 0, 0 + a_{i2} + \ldots + 0, \ldots, 0 + 0 + \ldots + a_{in}).$$

В силу аддитивности Δ по отношению к i–й строке Δ можно представить в виде суммы n определителей: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$. По доказанной лемме $\Delta_1 = a_{i1}A_{i1}, \Delta_2 = a_{i2}A_{i2}, \ldots, \Delta_n = a_{in}A_{in}$, что и требовалось.

По теореме о транспонированном определителе аналогичное утверждение имеет место для k-го столбца:

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \Delta,\ 1 \le k \le n.$$

Следствие. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (другого столбца) определителя равна нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad i \neq j$$

$$a_{1k}A_{1\ell} + a_{2k}A_{2\ell} + \ldots + a_{nk}A_{n\ell} = 0 \quad k \neq \ell.$$

Доказательство. По теореме о разложении определителя по элементам j–й строки имеем

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{i2}A_{j2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

так как на месте j–й строки получается i–я строка определителя.

§1.6. Определитель произведения двух квадратных матриц

Пусть $A \in F^{n\times n}, B \in F^{m\times m}$ и $C \in F^{m\times n}$. Матрица D вида $D = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ называется ступенчатой матрицей.

Теорема 1 (об определителе ступенчатой матрицы).

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство проведем методом математической индукции по порядку матрицы $A = (a_{ik})$. Из леммы предыдущего параграфа следует справедливость базы индукции. По теореме из §1.5 имеем

$$\Delta = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \ldots + a_{1n}\Delta_{1n},$$

где Δ_{1k} - алгебраические дополнения к элементу a_{ik} в определителе Δ. По индуктивному предположению $\Delta_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k} \cdot |B|$, где M_{1k}- минор элемента a_{ik} в определителе $|A|$. Отсюда получаем, что

$$\Delta = (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdot + a_{1n}A_{1n})|B|,$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения к a_{ik} определителя $|A|$. Таким образом, $\Delta = |A| \cdot |B|$.

Упр. 1. Показать, что для матриц, разбитых на блоки, выполняются следующие равенства:

$$(A_1 A_2) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2; \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1 B_2) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что произведения A_iB_k, встречающиеся в равенствах, имеют смысл.

Упр. 2. Пусть A_{ik} $i \in \{1,2\}, k \in \{1,2\}$ и B - квадратные матрицы одного и того же порядка, тогда(матричный вариант теоремы Якоби)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} + BA_{21} & A_{21} + BA_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right|.$$

Теорема 2(об определителе произведения двух квадратных матриц). Для любых матриц $A = (a_{ik})$ и $B = (b_{ik})$ имеет место равенство $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство . Построим матрицу $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$ порядка $2n$. Ее определитель $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$. Учитывая равенство из упражнения 2, получим

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{vmatrix}.$$

Последний определитель получен из третьего перестановками столбцов: первый с $(n+1)$-м, второй с $(n+2)$-м и т.д. Таким образом, $|A|\cdot|B| = (-1)^n|AB||-E| = |AB|$, что и требовалось доказать.

Ясно, что результат теоремы 2 верен и для произведений любого конечного числа матриц.

§1.7. Обратная матрица и теорема Крамера

Пусть $A = (a_{ik})$ - квадратная матрица порядка n над полем F. Матрица X из $F^{n\times n}$ называется *обратной* для матрицы A, если $XA = AX = E$. Матрица A называется *обратимой*, если она обладает хотя бы одной обратной матрицей.

Предложение. Если квадратная матрица A обратима, то обратная матрица для A единственна.

Доказательство. Пусть X_1 и X_2-матрицы, обратные для A : $X_1A = AX_1 = E$, $X_2A = AX_2 = E$. Ассоциируя в произведении X_1AX_2 множители XA_1 и AX_2, получим

$$X_2 = (X_1A)X_2 = X_1(AX_2) = X_1.$$

Что и требовалось.

Теорема(критерий обратимости). Для того чтобы матрица A из $F^{n\times n}$ была обратима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A обратима и X - обратная для A матрица. Тогда из равенства $AX = E$ имеем $|AX| = |E|$, $|A|\cdot|X| = 1$, следовательно $|A| \neq 0$.

Достаточность. Рассмотрим матрицу, элементами которой являются алгебраические дополнения к элементам определителя $|A|$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрицу $\tilde{A}$ называют *присоединенной* к матрице A. Нетрудно подсчитать, что $A\cdot\tilde{A} = \tilde{A}\cdot A = |A|\cdot E$. Если $|A| \neq 0$, то $|A|^{-1}\cdot\tilde{A} = X$ будет матрицей,обратной для A. Что и требовалось доказать.

Если матрица A обратима, то однозначно определенная матрица, обратная для A, обозначается A^{-1}. Матрицу, определитель которой отличен от нуля, называют *неособенной* или *невыраженной*. В силу теоремы невырожденность и обратимость в кольце матриц $F^{n\times n}$ над полем F равносильны. Отметим некоторые свойства обратной матрицы.

1. Если матрица A обратима, то

а) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; б) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; в) $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Если матрицы A и B обратимы, то $A{\cdot}B$ тоже обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Теперь рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Системе(9) сопутствуют: матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

столбец $b = (b_1 b_2 \ldots b_n)^T$ свободных членов и столбец $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)^T$ неизвестных. Систему (9) можно записать в матричном виде: $A\cdot x = b$. Столбец $\xi = (\xi_1\xi_2\ldots\xi_n)^T$ называют решением системы (9),если $A\xi = b$. Определитель $\Delta = |A|$ называют *определителем системы* (9).

Теорема Крамера. Если определитель Δ системы (9) отличен от нуля, то система (9) имеет единственное решение и это решение может быть вычислено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \tag{10}$$

где Δ_k - определитель, полученный из Δ заменой $k-$го столбца столбцом свободных слагаемых b.

Доказательство. По условию определитель Δ системы (10) отличен от нуля; тогда матрица A системы обратима. Покажем, что столбец $\xi = A^{-1}b$ является решением системы

$$A\xi = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b.$$

Пусть η - какое-либо решение системы (9):$A \cdot \eta = b$. Умножив обе части этого равенства на A^{-1}, получим $\eta = A^{-1}b$. Осталось показать справедливость формул (10), называемых формулами Крамера.

Так как $A^{-1} = |A|^{-1}\tilde{A}$, то равенство

$$\xi = A^{-1}b = |A|^{-1}\tilde{A} \cdot b$$

есть матричная запись формул Крамера. Теорема Крамера доказана.

Система n уравнений с n неизвестными $Ax = \theta$, где θ - нулевой столбец, называется *однородной* системой. Однородная система разрешима, так как θ является ее решением.

Следствие к теореме Крамера. Если однородная система $Ax = \theta$ имеет ненулевое решение,то определитель системы равен нулю:$|A| = 0$.

Задачи

1. Найти все матрицы в $R^{3\times 3}$, перестановочные с матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Если A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка, то

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \iff AB = BA.$$

3. В кольце $C^{2\times 2}$ найти все матрицы, квадраты которых равны единичной матрице.

4. Доказать, что любую квадратную матрицу A из $R^{n\times n}$ можно представить,и притом единственным образом, в виде $A = S + C$, где S - симметрическая, а C - кососимметрическая матрицы.

5. Пользуясь определением, записать определитель четвертого порядка в развернутой форме.

6. Найти значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

7. Пользуясь только определением, показать, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdot\ldots\cdot a_{n1}.$$

8. Если к каждому столбцу определителя Δ n-го порядка прибавить предыдущий, а к первому прибавить последний, то полученный определитель $\Delta_1 = (1+(-1)^{n-1})\Delta$. Показать!

9. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

10. Показать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$, $\{z_1, z_2\} \subset C$ образуют кольцо без делителей нуля.

11. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ x_1 & \dots & x_n & z \end{vmatrix} = z\cdot\Delta - x\tilde{A}y, \text{ где } x = (x_1 \dots x_n);\ y = (y_1 \dots y_n)^T.$$

12. Решить систему

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - 2x_n = n. \end{cases}$$

13. Доказать,что если A-нильпотентная матрица, т.е. такая матрица, что существует натуральное число k, для которого $A^k = 0$, то $(E-A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}$.

14. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_\ell \end{pmatrix}$,где E_k и E_ℓ - единичные матрицы порядков k и ℓ соответственно, $U \in R^{k\times\ell}$, а все остальные элементы равны нулю.

15. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ - единственные решения систем

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, & a_{11}y_1 + \ldots + a_{n1}y_n = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, & a_{1n}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = c_n. \end{array}$$

Доказать, что $c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n = b_1\eta_1 + \ldots + b_n\eta_n = C^T A^{-1} B =$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \ldots & c_n & 0 \end{vmatrix}.$$

16. Элементарными преобразованиями матрицы из $F^{m\times n}$ называют:

1. Умножние строки на элемент α поля $F:\ \alpha \neq 0$.

2. Прибавление к одной строке другой,умноженной на любой элемент из F.

3. Перестановку двух строк.

Элементарными матрицами из $F^{n\times n}$ называют матрицы $E_i(\alpha)$; $\alpha \in F$ $\alpha \neq 0$, $E_{ij}(\alpha)$; E_{ij}, полученные из единичной матрицы соответственно заменой единицы на i-м месте элементом α : $E_i(\alpha)$; заменой нуля в i-й строке и j-м столбце элементом α : $E_{ij}(\alpha)$; перестановкой i-й и j-й строк: E_{ij}.

Показать,что:

1*. Элементарные преобразования строк матрицы A могут быть получены умножением слева на соответствующие элементарные матрицы. $E_i(\alpha)A$, $E_{ij}(\alpha)A$ и $E_{ij}A$.

2*. Элементарными преобразованиями строк неособенную квадратную матрицу A можно преобразовать в единичную матрицу; иными словами, существуют такие элементарные матрицы $E_1, E_2, \ldots, E_s$, что $E_1E_2 \cdot \ldots \cdot E_sA = E$.

3*. Решение $X = A^{-1}B$ матричного уравнения $AX = B$, где A-неособенная матрица порядка n $B \in F^{n\times m}$,может быть получено приведением матрицы (A, B) элементарными преобразованиями строк к виду (E, X)

4*. Если A - неособенная матрица порядка n, то,приводя матрицу (A, E) элементарными преобразованиями строк к виду (E, X), получим $X = A^{-1}$.

ГЛАВА 2
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§2.1. Аксиомы и примеры

В различных разделах математики мы имеем дело с объектами, которые складываются и умножаются на скаляр. Например, в геометрии - это векторы обыкновенного пространства; в анализе - вещественные функции, заданные на промежутке. Несмотря на существенное различие объектов в приведенных примерах, сложение их и умножение на скаляр обладают общими алгебраическими закономерностями. Целесообразно все такие примеры изучить с единой позиции. Для этого мы введем главный объект изучения линейной алгебры - линейное пространство.

Непустое множество X называется *линейным* пространством над полем F, если на X выполняются следующие аксиомы.

I. Аксиомы сложения

I_1. Для любой пары элементов a и b из X однозначно определен элемент $a+b$ из X, называемый суммой элементов a и b.

I_2. $a+b=b+a$ для всех a и b из X - коммутативность суммы.

I_3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ для всех a, b и c из X - ассоциативность суммы.

I_4. В X существует такой элемент 0_X, что для любого a из X $a+0_X=a$.

I_5. Для любого элемента a из X найдется в X такой элемент $-a$, что $a+(-a)=0_X$.

II. Аксиомы умножения на скаляр

II_1. Для любых элементов a из X и α из F однозначно определен элемент αa из X, называемый произведением a на скаляр α.

II_2. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ для всех a и b из X и α из F - дистрибутивность по отношению к сложению в X.

II_3. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ для всех α и β из F и a из X - дистрибутивность по отношению к сложению в поле F.

II_4. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ для всех α и β из F и a из X.

II_5. Если ϵ - единица поля F, то $\epsilon a=a$ для любого a из X.

Нетрудно убедиться, что нулевой элемент 0_X, определенный в I_4, единственный в X, поэтому формулировка аксиомы I_5 корректна. Легко также показать, что сумма конечного числа элементов из X не зависит от порядка слагаемых и от способа расстановки скобок.

Упр.1. Показать, что для любой пары элементов a и b из X в X существует, и притом только один, такой элемент x, что $a+x=b$. Этот элемент обозначают $b-a$ и называют разностью элементов b и a.

Упр.2. Показать, что для любых a и b из X, α и β из F имеют место равенства: $\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b, (\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a, (-\alpha)a=\alpha(-a)=-\alpha a,\ \alpha 0_X = 0a = 0_X$.

Примеры. 1. Рассмотрим n-ю декартову степень F^n произвольного поля F, т.е. совокупность всех строк вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in F$. Сложение строк и умножение на скаляр определим формулами

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_1+\beta_n),$$

$$\beta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\beta\alpha_1,\ldots,\beta\alpha_n).$$

Легко проверить, что аксиомы I_{1-5} и II_{1-5} выполняются и, таким образом, F^n является линейным пространством над F. В ряде случаев удобно пользоваться пространством столбцов, обозначая его так же - F^n.

2. Пусть M - произвольное непустое множество, F - поле. Рассмотрим совокупность $\Phi(M,F)$ всех функций, определенных на M со значениями в F. Сложение двух функций f и φ и умножение функций f на скаляр α из поля F определим формулами

$$(f+\varphi)(x)=f(x)+\varphi(x), (\alpha f)(x)=\alpha(f(x), x\in M.$$

Легко проверить, что и здесь аксиомы I_{1-5} и II_{1-5} выполняются; таким образом, $\Phi(M,F)$ является линейным пространством над F.

3. Рассмотрим совокупность $F[t]$ всех многочленов от переменной t с коэффициентами из поля $F: \sum_{i=0}^{n}\alpha_i t^i, \alpha_i \in F$. Сложение двух многочленов и умножение многочлена на скаляр из поля F определим формулами

$$(\sum_i \alpha_i t^i)+(\sum_i \beta_i t^i)=\sum_i(\alpha_i+\beta_i)t^i, \beta(\sum_i \alpha_i t^i)=\sum_i(\beta\alpha_i)t^i.$$

Очевидно, и $F[t]$ является линейным пространством над полем F.

§2.2. Линейная зависимость

Понятие линейной зависимости является одним из основных инструментов изучения линейных пространств. Конечная система $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ элементов линейного пространства X называется *линейно зависимой*, если в поле F найдутся такие элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы один отличен от нуля, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_X$. Если такой зависимости нет, т.е. если из всякого соотношения $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_X$ следует $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, то система A называется линейно *независимой*.

Очевидно, если какая-либо часть системы A линейно зависима, то и вся система линейно зависима. Следовательно, в линейно независимой системе все ее подсистемы линейно независимы.

Элемент b пространства X называется *линейной комбинацией* элементов системы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, если b можно представить в виде $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n,\ \ \alpha_i \in F$. Если B – система из X, то запись $A \vdash B$ означает, что каждый элемент из B является линейной комбинацией элементов системы A.

Упр.1. Пусть A, B и C - такие конечные системы пространства X, что $A \vdash B$ и $B \vdash C$. Показать, что $A \vdash C$.

Системы элементов A и B из X называются *линейно эквивалентными* (в записи $A \sim B$), если $A \vdash B$ и $B \vdash A$.

Упр.2. Проверить, что отношение линейной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Лемма. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ - такие системы элементов линейного пространства X, что B линейно независима, а система $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ линейно зависима, тогда в A найдется такой элемент a_i, что

$$(B \cup (A \setminus a_i)) \vdash a_i.$$

Доказательство. По условию в поле F найдутся такие элементы $\beta_1, \ldots, \beta_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_X.$$

Так как система B линейно независима, то среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеется хотя бы один, отличный от нуля. Пусть $\alpha_i \neq 0$. Тогда наше равенство можно разрешить относительно a_i. Это означает, что $(B \cup (A \setminus a_i)) \vdash a_i$.

Теорема о замене. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ - такие подсистемы линейного пространства X, что $A \vdash B$ и B линейно независима, тогда $n \geq m$ и в A найдется такая подсистема A_1, что $B \cup (A \setminus A_1) \sim A$.

Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $B = \{b_1\}$ и $b_1 \neq 0_X$. Так как $A \vdash b_1$, то $n \geq 1$ и система $\{b_1, a_1, \ldots, a_n\}$ линейно зависима. Поэтому в системе A (по лемме) найдется такой a_i, что $\{b_1, A \setminus a_i\} \vdash a_i$. Таким образом, $\{b_1, A \setminus a_i\} \sim A$. Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ и $m > 1$. Так как $A \vdash \{b_1, \ldots, b_{m-1}\}$, то по индуктивному предположению $n \geq m - 1$ и в A найдется такая подсистема A_0, что $|A_0| = m - 1$ и

$$C = \{b_1, \ldots, b_{m-1}, A \setminus A_0\} \sim A.$$

Так как $C \vdash b_m$, то $n \geq m$ и система $\overline{C} = B \cup (A \setminus A_0)$ линейно зависима. Поэтому в $A \setminus A_0$ (по лемме) найдется такой элемент a_j, что $\overline{C} \setminus a_j \vdash a_j$. Если $A_1 = A_0 \cup \{a_j\}$, то $B \cup (A \setminus A_1)$ - искомая система, линейно эквивалентная системе A. Теорема о замене доказана.

Следствие 1. Если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ - такие системы из X, что $A \vdash B$ и $m > n$, то B линейно зависима.

Следствие 2. Если A и B такие конечные системы из X, что $A \sim B$ и обе линейно независимы, то $|A| = |B|$.

§2.3. Подпространства

Вторым важным инструментом изучения линейных пространств является обращение к таким их частям, которые сами являются линейными пространствами относительно операций, определенных во всем пространстве. Такие части называются *подпространствами*. Чтобы убедиться, что подмножество M линейного пространства X есть подпространство в X, достаточно проверить выполнимость лишь аксиом I_1,II_1. Таким образом, непустое подмножество M из X будет тогда и только тогда подпространством, когда: 1) для каждой пары x и y элементов из M $x + y \in M$; 2) для любых x из M и α из F $\alpha x \in M$.

Примеры. 1. Пусть N - непустое подмножество произвольного множества M, а F - поле. Тогда совокупность всех отображений f из $\Phi(M, F)$, для которых $f(x) = 0$, для всех x из N является подпространством из $\Phi(M, F)$.

2. Если 0_X - нулевой элемент линейного пространства X, то $\{0_X\}$ и само X являются подпространствами в X.

3. Обозначим через $F_n[t]$ совокупность всех многочленов из $F[t]$, степень которых $\leq n$. Легко видеть, что $F_n[t]$ - подпространство из $F[t]$.

4. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, x_k = 0,\ \ i \in \{1, \ldots, m\}$ - система m линейных однородных уравнений с коэффициентами из поля F. Нетрудно показать, что совокупность S_0 всех решений этой системы является подпространством из F^n.

5. В пространстве всех вещественных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, совокупность $C[a, b]$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций является подпространством.

Рассмотрим два достаточно общих приема построения подпространств. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ - некоторый набор подмножеств линейного пространства X. Их *суммой* называется совокупность $M_1 + \ldots + M_n$ всех элементов вида $x_1 + \ldots + x_n$, где $x_i \in M_i$. Нетрудно проверить, что если $M_1, \ldots, M_n$ - подпространства, то $M = M_1 + \ldots + M_n$ будет подпространством из X, причем $M_i \subseteq M$. Подпространство M назовем *прямой суммой* подпространств $M_1, \ldots, M_n$, если $M = M_1 + \ldots + M_n$ и $M_k \cap \overline{M}_k = \{0_X\}$ для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$, где $\overline{M}_k$ есть сумма данных подпространств за исключением M_k. В этом случае мы будем писать $M = M_1 \dot{+} \ldots \dot{+} M_n$.

Теорема. Подпространство M линейного пространства X будет прямой суммой подпространств $M_1, \ldots, M_n$, $M_k \subseteq M$ тогда и только тогда, когда для любого x из M существует, и притом только один, набор $x_1, \ldots, x_n$ таких элементов, что $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_k \in M_k$.

Доказательство. Достаточно показать однозначность представления x в виде $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_k \in M_k$. Пусть еще $y_1 + \ldots + y_n = x$, $y_k \in M_k$. Тогда

$$x_k - y_k = \sum_{i \neq k} (y_i - x_i) \in M_k \cap \overline{M}_k,$$

следовательно, $x_k = y_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Обратно, пусть $x \in M_k \cap \overline{M}_k$. Тогда найдутся такие $y_i \in M_i$, $i \neq k$, что $x = \sum_{i \neq k} y_i$. В силу однозначности представления x в виде суммы элементов из $M_1, \ldots, M_n$ имеем $x = 0_X$. Что и требовалось доказать.

Упр. 1. Доказать: если в сумме $M_1 + \ldots + M_n$ из равенства $x_1 + \ldots + x_n = 0_X$, $x_k \in M_k$ следует $x_1 = 0_X, \ldots, x_n = 0_X$, то эта сумма прямая.

Упр.2. Пусть M_1, M_2, M - подпространства линейного пространства X, причем $X = M_1 \dot{+} M_2$, $M_1 \subseteq M$. Показать, что $M = M_1 \dot{+} (M \cap M_2)$.

Пусть теперь $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ - подмножество линейного пространства X. Обозначим через $\mathcal{L}(A)$ совокупность всех линейных комбинаций элементов из A:

$$\mathcal{L}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m,\ \alpha_i \in F\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{L}(A)$ является подпространством из X, содержащим A. $\mathcal{L}(A)$ называют *линейной оболочкой* системы A в X или *подпространством, порожденным* элементами $a_1, \ldots, a_n$.

Упр.3. Если A и B - две конечные системы из X, то верны импликации $A \vdash B \iff \mathcal{L}(A) \supseteq \mathcal{L}(B)$. Таким образом,

$$A \sim B \iff \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B).$$

Упр.4. Если $A \vdash B$, то $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A)$.

Упр.5. Пересечение произвольного набора подпространств линейного пространства X является подпространством. Отсюда $\mathcal{L}(A)$ совпадает с пересечением всех подпространств из X, содержащих A.

Упр.6. Объединение двух подпространств тогда и только тогда будет подпространством, когда одно из них содержится в другом.

Упр.7. Пусть A - конечная система элементов линейного пространства X, $a \in A$, $A_1 = A \backslash a$, u и v - элементы из $\mathcal{L}(A)$, $v \notin \mathcal{L}(A_1)$. Показать, что найдется такой скаляр λ, что $u - \lambda v \in \mathcal{L}(A_1)$.

§2.4. Конечномерные пространства

Для определения базы линейного пространства понятие линейной независимости и линейной комбинации, данные в §2.2 для конечных систем, распространим на бесконечные системы. Произвольную систему элементов будем называть линейно независимой, если любая ее конечная часть линейно независима. Пусть A и B - произвольные подмножества линейного пространства. Условимся писать $A \vdash B$, если для любого b из B найдется в A такая конечная подсистема A_1, что $A_1 \vdash b$. Множество B линейного пространства X называется базой(базисом) X, если B линейно независимо и $B \vdash X$. Опираясь на лемму Цорна, можно показать, что каждое линейное пространство над произвольным полем обладает базой. Если линейное пространство обладает конечной базой, то оно называется *конечномерным*.

Любые две базы конечномерного линейного пространства, очевидно, конечны, линейно эквивалентны и потому равномощны. Число элементов базы конечномерного пространства (не зависящее от выбора базы) называется *размерностью* пространства и обозначается $\dim X$. Условимся считать $\dim\{0_X\} = 0$.

Примеры. 1. Любые три некомпланарных вектора, как показано в аналитической геометрии, являются базой пространства "направленных отрезков". Таким образом, его размерность равна трем.

2. Система $T = \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ пространства многочленов $F[t]$ линейно независима и $T \vdash F[t]$. Следовательно, T является базой $F[t]$, а $F[t]$ не будет конечномерным.

3. Пусть F - произвольное поле. Элементы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ пространства строк F^n линейно независимы, а любая строка $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является линейной комбинацией их: $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n a_n$. Таким образом, система $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является базой F^n, условимся называть ее стандартной, и $\dim F^n = n$.

4. Матрицу $A = (\alpha_{ik}), i \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, n\}$ размеров $m \times n$ с элементами α_{ik} из поля F можно мыслить как строку длиной mn, записанную в виде таблицы. Поэтому совокупность $F^{m \times n}$ всех матриц размеров $m \times n$ относительно сложения $(\alpha_{ik}) + (\beta_{ik}) = (\alpha_{ik} + \beta_{ik})$ и умножения $\lambda(\alpha_{ik}) = (\lambda\alpha_{ik})$ на скаляр λ из F является линейным пространством над F размерности mn.

5. Поле комплексных чисел C есть линейное пространство над полем R вещественных чисел размерности 2. Однако произвольное поле P является линейным пространством над P размерности I.

Пусть X - конечномерное линейное пространство размерности n; из теоремы о замене вытекают следующие два свойства X :

1. Каждая система из X, содержащая $n+1$ элемент и более, линейно зависима.

2. Каждую линейно независимую подсистему из X можно дополнить до базы X.

В самом деле, возьмем какую-либо базу $B = \{b_1 \ldots, b_n\}$ пространства X и систему $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Если $m \geq n + 1$, то A линейно зависима, так как $B \vdash A$. Пусть теперь A линейно независима, тогда $m \leq n$. Если $m = n$, то A уже является базой X. Если $m < n$, то по упомянутой теореме в B найдется такая подсистема B_1, что $|B_1| = |A|$ и $A \cup (B \setminus B_1) \sim B$. Таким образом, $B \setminus B_1$ - искомое дополнение A до базы пространства X.

Упр.1. Если M - подпространство конечномерного пространства X, то M также конечномерно, причем $\dim M \leq \dim X$. Если же $\dim M = \dim X$, то $M = X$.

Введем еще одно понятие. Пусть A - конечная система элементов линейного пространства. Подмножество M из A называется *максимальной линейной независимой* подсистемой в A, если M линейно независимо, а каждое содержащее M подмножество из A линейно зависимо либо $M = A$. Так как $M \vdash A$, то M является базой линейной оболочки $\mathcal{L}(A)$. Следовательно, число элементов во всех максимальных линейно независимых подсистемах одно и то же. Это число называют рангом системы A и обозначают $r(A)$. Очевидно, $r(A) = \dim \mathcal{L}(A)$.

Упр.2. Если A и B - конечные системы, то верны следующие импликации: 1. $A \vdash B \Longrightarrow r(A) \geq r(B)$. Таким образом, $A \sim B \Longrightarrow r(A) = r(B)$.

2. $A \vdash B \Longrightarrow r(A \cup B) = r(A)$.

3. $A \vdash B$, и $r(A) = r(B) \Longrightarrow A \sim B$.

Теорема о координатах. Если $B = \{b_1, \ldots, b_1\}$ - база линейного пространства X, то для любого элемента x из X найдется, и притом только одна, такая строка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из F^n, что $x = \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n$.

Доказательство. Так как $B \vdash x$, то достаточно показать однозначность определенной в теореме строки. Если $x = \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_n b_n$, то $(\xi_1 - \eta_1)b_1 + \ldots + (\xi_n - \eta_n)b_n = 0_X$. Но система B линейно независима, поэтому $\xi_1 - \eta_1 = 0, \ldots, \xi_n - \eta_n = 0$. Легко видеть, что построенное отображение $x \rightarrow \xi$ является биекцией пространства X на F^n. Строку ξ называют *строкой координат* элемента x, а ξ_i - *координатами* x относительно базы B. Биекция $X \rightarrow F^n$ отражает не только теоретико-множественную связь между X и F^n, но имеет и глубокий алгебраический смысл.

Дополнение к теореме о координатах. Если ξ и η - строки координат элементов x и y из X, $\lambda \in F$, то $\xi + \eta$ и $\lambda\xi$ являются строками координат элементов $x + y$ и λx соответственно.

Доказательство. Так как $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i b_i$, то $x + y = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) b_i$. Учитывая однозначную определенность координатной строки, имеем $x + y \rightarrow \xi + \eta$. Аналогично доказывается второе утверждение.

Теорема о координатах приводит нас к важному понятию изоморфизма. Пусть X и Y - два линейных пространства над одним и тем же полем F. Отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *изоморфным* отображением(изоморфизмом), если φ является биекцией X на Y и $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ и $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любых x_1, x_2, x из X и любого λ из F. Отображение $x \rightarrow \xi$, построенное в теореме о координатах и дополнении к ней, является изоморфизмом X на F^n.

Упр.3. Показать, что отношение изоморфизма линейных пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если имеется какой-либо изоморфизм пространств X и Y, то пишут $X \cong Y$.

Упр.4. Линейное пространство Y, изоморфное конечномерному пространству X, само конечномерно. Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их разномерности равны.

Если $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ - две базы пространства X, то $v_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} u_i$. Матрицу $T = (\tau_{ki})$ называют матрицей перехода от базы u к базе v.

Упр.5 Показать, что определитель матрицы T отличен от нуля. Пусть ξ и η - столбцы координат элемента x из X относительно баз u и v соответственно. Показать, что $\xi = T \cdot \eta$.

В заключение приведем и докажем *теорему о размерности суммы двух подпространств*.

Если M_1 и M_2 - конечномерные подпространства линейного пространства X, то $M_1 + M_2$ также конечномерно и

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Доказательство. Если пересечение $M_1 \cap M_2$ не нулевое, то его базу $\{a_1, \ldots, a_d\}$ дополним до базы $\{a_1, \ldots, a_d, b_{d+1}, \ldots, b_{m_1}\}$ пространства M_1 и дополним до базы $\{a_1, \ldots, a_d, c_{d+1}, \ldots, c_{m_2}\}$ пространства M_2. Достаточно показать, что система

$$S = \{a_1, \ldots, a_d, b_{d+1}, \ldots, b_{m_1}, c_{d+1}, \ldots, c_{m_2}\}$$

линейно независима, так как отношение $S \vdash M_1 + M_2$ очевидно. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_d a_d + \beta_{d+1} b_{d+1} + \ldots + \beta_{m_1} b_{m_1} + \gamma_{d+1} c_{d+1} + \ldots + \gamma_{m_2} c_{m_2} = 0_X,$$

$$\text{где} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_{d+1}, \ldots, \beta_{m_1}, \gamma_{d+1}, \ldots, \gamma_{m_2}\} \subset F.$$

Отсюда элемент $\gamma_{d+1} c_{d+1} + \ldots + \gamma_{m_2} c_{m_2}$ содержится в $M_1 \cap M_2$, следовательно, $\gamma_{d+1} c_{d+1} + \ldots + \gamma_{m_2} c_{m_2} = \alpha'_1 a_1 + \ldots + \alpha'_d a_d$, где $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_d\} \subset F$. Так как система $\{a_1, \ldots, a_d, c_{d+1}, \ldots, c_{m2}\}$ линейно независима, то $\alpha'_{im} = \ldots = \alpha'_d = \gamma_{d+1} = \ldots = \gamma_{m2} = 0$. Поэтому из исходного равенства следует $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = \beta_{d+1} = \ldots = \beta_{m_1} = 0$. Таким образом, $\dim(M_1 + M_2) = |S| = m_1 + (m_2 - d)$.

Если же $M_1 \cap M_2 = \{0_X\}$, то, как легко убедиться, объединение баз подпространств M_1 и M_2 будет базой $M_1 + M_2$, и тем самым теорема также справедлива.

Задачи

1. Привести пример алгебраической системы, в которой выполняются аксиомы I_{1-5} и II_{1-4}, но не выполняется аксиома II_5.

2. Каждое линейное пространство $X(C)$ над полем комплексных чисел C можно рассматривать как линейное пространство $X(R)$ над полем вещественных чисел R. Если размерность комплексного пространства $X(C)$ равна n, то какова размерность вещественного пространства $X(R)$?

3. Показать, что для каждого подпространства M конечномерного линейного пространства X найдется такое подпространство N, что $X = M \dot{+} N$. Однозначно ли определяется это дополнение N?

4. Пусть M_1, M_2, M_3 - подпространства линейного пространства X, $M_1 \cap (M_2 + M_3) = L_1$ и $(M_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_3) = L_2$. Доказать, что: а) $L_1 \supseteq L_2$; можно ли утверждать, что $L_2 = L_1$? б) если $M_2 \subseteq M_1$, то $L_1 = L_2$.

5. Пусть X - конечномерное линейное пространство размерности n. Показать, что n элементов пространства X линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих элементов относительно некоторой базы, равен нулю.

6. Пусть φ - изоморфное отображение пространства X на пространство Y, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ - система из X. Показать, что $r(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = r(a_1, \ldots, a_n)$.

7. Пусть $F[x_1, \ldots, x_n]$ - пространство всех многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем F. Найти: а) размерность его подпространства всех многочленов степени $\leq k$; б) размерность подпространства однородных многочленов степени k.

8. Обозначим через F^ω пространство всех бесконечных последовательностей с элементами из поля F. Доказать, что в пространствах R^ω и C^ω являются подпространствами: а) совокупность K всех фундаментальных последовательностей; б) совокупность Γ всех последовательностей $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, удовлетворяющих условию Гильберта: ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ сходится.

Пусть L подпространство линейного пространства X, а x_0 - фиксированный его элемент. Множество M в X

$$M = x_0 + L = \{x_0 + \ell;\ \ell \in L\}$$

называется многообразием пространства X, определенным x_0 и L. В последующих задачах $M_1 = x_1 + L_1$, $M_2 = x_2 + L_2$-многообразия линейного пространства X.

9. Показать выполнимость следующих импликаций: а) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \iff x_2 - x_1 \in L_1 + L_2$; б) если $X = L_1 \dot{+} L_2$, то $M_1 \cap M_2$ не пусто и одноэлементно; в) $M_1 \subset M_2 \iff x_2 - x_1 \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$; г) $M_1 = M_2 \iff x_2 - x_1 \in L_2$ и $L_1 = L_2$.

10. Если L_1 и L_2 конечномерны: $\dim L_1 = n_1, \dim L_2 = n_2$, то найдется такое многообразие $M_3 = x_3 + L_3$, что $M_1 \cup M_2 \subseteq M_3$; при этом $L_3 = L_1 + L_2$, если $a = x_2 - x_1, \in L_1 + L_2$ и $L_3 = L_1 + L_2 + \mathcal{L}(a)$, если $a \in L_1 + L_2$.

11. На множестве X/L всех многообразий пространства X над по-

лем F определяем операции

$$(a_1+L)+(a_2+L)=(a_1+a_2+L),\ \alpha(a+L)=\alpha a+L$$

для любых a, a_1, a_2 из X и α из F. Показать, что

а) X/L относительно определенных операций является линейным пространством над полем F. X/L называется фактор-пространством пространства X по L;

б) если X конечномерно, то X/L также конечномерно и

$$\dim X=\dim L+\dim(X/L).$$

ГЛАВА 3
ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§3.1 Пространство линейных отображений

Пример 2, рассмотренный в §2.1, допускает следующее обобщение. Пусть X - произвольное непустое множество, Y- линейное пространство над полем F. Через $\Phi(X,Y)$ обозначим совокупность всех функций f, определенных на X со значениями в Y. Сумму двух функций f и φ и умножение функций f на скаляр α из поля F определим формулами

$$(f+\varphi)(x)=f(x)+\varphi(x),(\alpha f)(x)=\alpha(f(x)),\ x\in X.$$

Легко проверить, что на $\Phi(X,Y)$ выполняются все аксиомы I_{1-5} и II_{1-5}. Проверим, например, выполнимость аксиомы II_2. Для этого нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(\alpha(f+\varphi))(x)=\alpha((f+\varphi)(x))=\alpha(f(x)+\varphi(x))=$$

$$=\alpha(f(x))+\alpha(\varphi(x))=(\alpha f)(x)+(\alpha\varphi)(x)=(\alpha f+\alpha\varphi)(x),\ x\in X.$$

Таким образом, $\Phi(X,Y)$ является линейным пространством над полем F.

В геометрии показано, что компонента $\vec{a}'$ вектора $\vec{a}$ на прямую или плоскость обладает свойством $(\vec{a}+\vec{b})'=\vec{a}'+\vec{b}',(\alpha\vec{a})'=\alpha\vec{a}'$. Аналогичными свойствами обладают производная дифференцируемой функции и интеграл интегрируемой функции. Абстрагируясь от этих и других подобных примеров, мы приходим к понятию линейного отображения. Пусть X и Y - произвольные линейные пространства над одним и тем же полем F. Отображение $\mathcal{A}:X\to Y$ называется *линейным*, если выполняются равенства

$$\mathcal{A}(x_1+x_2)=\mathcal{A}(x_1)+\mathcal{A}(x_2)\text{ -- аддитивность }\mathcal{A},$$

$$\mathcal{A}(\alpha x)=\alpha\mathcal{A}(x)\text{ -- однородность }\mathcal{A}$$

для любых элементов x_1,x_2 и x из X и любого α из F.

Совокупность всех линейных отображений из X в Y обозначим через $H(X,Y)$.

Упр.1. Если $\mathcal{A}\in H(X,Y)$, то имеют место следующие равенства:

$$\mathcal{A}0_X=0_Y,\ \mathcal{A}(x_1-x_2)=\mathcal{A}x_1-\mathcal{A}x_2$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)=\alpha_1\mathcal{A}x_1+\ldots+\alpha_n\mathcal{A}x_n,$$

где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset F, \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$.

Теорема 1. Совокупность $H(X, Y)$ всех линейных отображений из X в Y является подпространством пространства $\Phi(X, Y)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \subset H\{X, Y\}$ и $\{x_1, x_2\} \subset X$. Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x_1+x_2) = \mathcal{A}(x_1+x_2)+\mathcal{B}(x_1+x_2) = (\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2)+(\mathcal{B}x_1+\mathcal{B}x_2) =$$

$$= (\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_1) + (\mathcal{A}x_2 + \mathcal{B}x_2) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})x_1 + (\mathcal{A}+\mathcal{B})x_2;$$

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha x_1) = \mathcal{A}(\alpha x_1)+\mathcal{B}(\alpha x_1) = \alpha(\mathcal{A}x_1)+\alpha(\mathcal{B}x_1) = \alpha((\mathcal{A}+\mathcal{B})x_1); \ \alpha \in F.$$

Следовательно, $\mathcal{A}+\mathcal{B} \in H(X, Y)$. Аналогично можно показать, что если $\mathcal{A} \in H(X, Y)$ и $\alpha \in F$, то $\alpha\mathcal{A} \in H(X, Y)$.

Примеры. 1. Если $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ - многочлен из $R[t]$, то отображения

$$f \to \mathcal{D}f = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots + n\alpha_n^{n-1} t,$$

$$f \to \mathcal{S}f = \alpha_0 t + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}\alpha_n t^{n+1}$$

являются линейными отображениями $R[t]$ в $R[t]$.

2. Для сложения и умножения матриц имеет место закон дистрибутивности. Поэтому отображение, сопоставляющее колонку ξ из F^n со столбцом $\eta = A\xi \in F^m$, где $A \in F^{m \times n}$, является линейным отображением F^n в F^m.

3. Если X - линейное пространство над полем F, то элементы из $H(X, F)$ называют *линейными функционалами*. Их совокупность $H(X, F)$ является линейным пространством. Оно называется *пространством, сопряженным* с X, и обозначается X'.

4. Рассмотрим пространство X вещественных функций f, интегрируемых на отрезке $[0, 1]$. Положим $Sf = \int_0^1 f(t)dt$. Как показано в курсе математического анализа, отображение $S : X \to R$ линейно.

Познакомимся с одним из способов построения линейных отображений.

Лемма. Пусть X - конечномерное линейное пространство над полем F размерности n, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - его база, Y - произвольное линейное пространство над тем же полем. Тогда для любой системы $\{v_1, \ldots, v_n\}$ элементов из Y найдется, и притом только одно, такое линейное отображение $\mathcal{A}$, что $\mathcal{A} : X \to Y, \mathcal{A}u_i = v_i, \ i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Отображение $\mathcal{A}$, сопоставляющее элемент $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$ из X с элементом $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i$ из Y, очевидно, линейно и обладает требуемым свойством. Пусть B-такое линейное отображение из X в Y, что $Bu_i = v_i$. Тогда

$$Bx = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Bu_i = \sum_{i=1}^{n} \xi v_i = Ax$$

для любого x из X. Следовательно, $B = A$. Что и требовалось доказать.

Другой способ построения линейных отображений связан с их матричным представлением.

Пусть X и Y - конечномерные линейные пространства над полем F размерностей n и m соответственно и $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - база X, $v = \{v_1, \ldots, v_m\}$ - база Y. Если A - линейное отображение из X в Y, то

$$Au_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} v_i, \quad \alpha_{ik} \in F, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Эта система равенств позволяет отображение A однозначно сопоставить с матрицей $A = (\alpha_{ik}) \in F^{m \times n}$. Столбцами матрицы A служат координаты образов $Au_1, \ldots, Au_n$ базисных элементов $u_1, \ldots, u_n$ пространства X относительно базы $v_1, \ldots, v_m$ пространства Y. Эту матрицу будем называть *матрицей линейного отображения Аотносительно базисов u и v*, а полученное отображение $H(X, Y)$ в $F^{m \times n}$ записывать $A \xrightarrow{u,v} A$.

Теорема 2. Отображение $A \xrightarrow{u,v} A$ является изоморфным отображением пространства $H(X, Y)$ на пространство матриц $F^{m \times n}$.

Доказательство. Сначала покажем, что $A \xrightarrow{u,v} A$ является биекцией $H(X, Y)$ на $F^{m \times n}$. Пусть $A = (\alpha_{ik}), 1 \le i \le m, 1 \le k \le n$ - произвольная матрица из $F^{m \times n}$. Построим систему элементов $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset Y$, где $w_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} v_i$. Тогда по лемме найдется, и притом только одно, такое линейное отображение A из X в Y, что $Au_k = w_k, 1 \le k \le n$. Очевидно, $A \xrightarrow{u,v} A$. Пусть теперь A и B - два линейных отображения из X в Y и $A = (\alpha_{ik}), B = (\beta_{ik})$ - им соответствующие матрицы. Тогда

$$(A + B)u_k = Au_n + Bu_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) v_i.$$

Таким образом, $A + B \xrightarrow{u,v} (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) = A + B$. Аналогично можно показать, что если α - элемент поля F, то $\alpha A \xrightarrow{u,v} \alpha A$. Что и требовались доказать.

Следствие 1. Если X и Y - конечномерные пространства, $\dim X = n, \dim Y = m$, то $\dim H(X,Y) = mn$.

Следствие 2. Если X - конечномерное пространство размерности n, то пространство, сопряженное с ним, имеет также размерность n.

Напомним определение произведения матриц. Пусть $A = (\alpha_{ik}) \in F^{m\times n}, B = (\beta_{ik}) \in F^{n\times q}$. Матрица $C = (\gamma_{ik}) \in F^{m\times q}$ называется произведением матриц A и $B : C = A \cdot B$, если

$$\gamma_{ik} = \sum_{v=1}^{n} \alpha_{iv}\beta_{vk}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le k \le q.$$

Теорема 3. Пусть в пространствах X и Y выбраны базы u и v, элементы $x \in X, y \in Y$ и $\mathcal{A} \in H(X,Y)$. Если $\mathcal{A} \xleftrightarrow{u,v} A$, то

$$y = \mathcal{A}x \Longleftrightarrow \eta = A\xi,$$

где ξ и η-столбцы координат элементов x и y относительно баз u и v соответственно.

Доказательство. Условимся равенства, характеризующие матрицу A отображения $\mathcal{A}$, записывать в матричной форме:$\mathcal{A}u = v \cdot A$, где $\mathcal{A}u = (\mathcal{A}u_1, \ldots, \mathcal{A}u_n)$. Из соотношения $x = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n = u \cdot \xi$ получаем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}u \cdot \xi$. Поэтому $\mathcal{A}x = (v \cdot A) \cdot \xi = v \cdot (A\xi)$. Отсюда легко следует справедливость требуемых импликаций.

Упр.2. Пусть u и u' - базы пространства X, v и v' - базы пространства Y, S и T - матрицы перехода от u к u' и от v к v' соответственно. Показать: если $\mathcal{A} \xleftrightarrow{u,v} A$ и $\mathcal{A} \xleftrightarrow{u',v'} B$, то $A \cdot S = T \cdot B$, в частности, если $Y = X$ и $u = v, u' = v'$, то $S = T$ и $AT = TB$, или $B = T^{-1}AT$.

§3.2. Ядро и область значений

Как и выше, X и Y - два линейных пространства над одним и тем же полем F,$\mathcal{A} \in H(X,Y)$. С $\mathcal{A}$ связаны два важных подпространства - ядро и область значений. Совокупность $X_{\mathcal{A}}$ таких элементов x из X, что $\mathcal{A}x = 0_Y$, называют *ядром* отображения $\mathcal{A}$. Совокупность $\mathcal{A}X$ элементов из Y вида $\mathcal{A}x$, когда x пробегает X, называют *областью значений* отображения $\mathcal{A}$ или *образом* $\mathcal{A}$.

Теорема 1. Ядро $X_{\mathcal{A}}$ и область значений $\mathcal{A}X$ являются подпространствами, если $\mathcal{A} \in H(X,Y)$. Если X конечномерно, то конечномерны $X_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}X$.

Доказательство. Ясно, что X_A является подпространством X. Пусть теперь y_1 и y_2 - элементы из AX. В X найдутся такие x_1 и x_2, что $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$. Тогда $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$; таким образом,$y_1 + y_2 \in AX$. Если $y = Ax \in AX$ и $\alpha \in F$, то $\alpha y = \alpha(Ax) = A(\alpha x)$; $\alpha y \in AX$.

Если X конечномерно, то и X_A конечномерно, так как $X_A \subseteq X$. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - база X. Легко показать, что

$$AX = \mathcal{L}(Au_1, \ldots, Au_n),$$

следовательно, и AX конечномерно.

$\dim X_A$ называют *дефектом* отображения A и обозначают d_A, $\dim AX$ называют *рангом* A и обозначают r_A.

Теорема 2. Для любого $A \in H(X,Y)$, если $\dim X = n$, то $d_A + r_A = n$.

Доказательство. Пусть сначала $X_A \neq \{0_X\}$. Базу $\{u_1, \ldots, u_d\}$(для простоты записи считаем $d = d_A$) ядра X_A дополним элементами $u_{d+1}, \ldots, u_n$ до базы пространства X. Покажем, что элементы $Au_{d+1}, \ldots, Au_n$ из Y линейно независимы. Если

$$\alpha_{d+1}(Au_{d+1}) + \ldots + \alpha_n(Au_n) = 0_Y$$

для $\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n$ из F, то $\alpha_{d+1}u_{d+1} + \ldots + \alpha_n u_n \in X_A$. Отсюда $\alpha_{d+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Так как

$$AX = \mathcal{L}(Au_{d+1}, \ldots, Au_n),$$

то система $\{Au_{d+1}, \ldots, Au_n\}$ является базой AX. Следовательно, $\dim AX = n - d$. Но $\dim AX = r_A$, таким образом, $r_A = n - d_A$. Если $X_A = \{0_X\}$, то $\dim AX = n = r_A$. Теорема 2 доказана.

Упр.1. Пусть X и Y - конечномерные линейные пространства, A - матрица линейного отображения A из X в Y. Показать, что r_A равен рангу $r(A)$ соответствующей A матрицы A.

Упр.2. Пусть X и Y - конечномерные линейные пространства над полем F размерности n и m, $A \in H(X,Y)$, $r_A = r$. Показать, что в X и Y найдутся такие базы u и v, что матрица A_0 отображения A относительно этих баз имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} E_{rr} & 0_{r\ n-r} \\ 0_{m-r\ r} & 0_{m-r\ n-r} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что для любой матрицы A из $F^{m \times n}$ найдутся такие обратимые матрицы T и S, что $T^{-1}AS$ имеет вид A_0.

Упр.3. Пусть X - конечномерное пространство, X_1 - его подпространство, $A \in H(X,Y)$. Доказать, что

$$\dim AX_1 + \dim(X_1 \cap X_A) = \dim X_1.$$

Используем полученные результаты для анализа систем линейных уравнений. Каждую линейную систему можно записать в виде

$$A \cdot x = b, \text{ где } A = (\alpha_{ik}) \in F^{m \times n},$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - столбец неизвестных, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^T$ - столбец свободных членов.

Однородную систему $A \cdot x = 0_{F^m}$ называют *присоединенной* к системе $A \cdot x = b$. Колонку $\xi \in F^n$ называют *решением* этой системы, если $A\xi = b$. Если эта система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*.

Вспомним отображение $\xi \to \eta = A\xi$ пространства F^n в F^m, обозначим его через $\mathcal{A}$; оно линейно,и матрица $\mathcal{A}$ относительно стандартных баз в F^n и F^m есть A. Пусть r - ранг матрицы A, а значит,и отображения $\mathcal{A}$.

Совокупность S_0 всех решений однородной системы $A \cdot x = 0_{F^m}$ совпадает с ядром отображения $\mathcal{A}$. Поэтому $\dim S_0 = n - r$. Базу пространства S_0 называют *фундаментальной* системой решений однородной системы $A \cdot x = 0_{F^m}$.

Если $\{a^1, \ldots, a^n\}$ - столбцы матрицы A, то $AF^n = \mathcal{L}(a^1, \ldots, a^n)$. Очевидно, система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $b \in AF^n$. Отсюда следует критерий совместности линейных алгебраических систем: система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы (A, b). Пусть S_b - совокупность всех решений совместной системы $Ax = b$, ξ^0 - какое-либо ее решение. Легко показать, что $S_b = \xi^0 + S_0$. Если $\{f_1, \ldots, f_{n-r}\}$ - база пространства S_0, то все решения системы $Ax = b$ могут быть получены по формуле

$$\eta = \xi^0 + t_1 f_1 + \ldots + t_{n-r} f_{n-r},$$

где t_i, $1 \leq i \leq n - r$ пробегают все элементы поля F.

§3.3. Произведение линейных отображений

Произведение (*суперпозиция*) отображений - понятие теоретико-множественное. Наша задача - изучить алгебраические закономерности, связанные с этим понятием.

Пусть X, Y, Z - линейные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A} \in \Phi(X, Y)$, $\mathcal{B} \in \Phi(Y, Z)$, то их произведение $\mathcal{B}\mathcal{A}$ определяется формулой $(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $x \in X$.

Теорема 1. Если $\mathcal{A} \in H(X, Y)$, $\mathcal{B} \in H(Y, Z)$, то $\mathcal{B}\mathcal{A} \in H(X, Z)$.

Доказательство. Для $\{x_1, x_2\} \subset X$ нетрудно убедиться в справедливости следующей серии равенств:

$$\mathcal{B}\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x_1 + x_2)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2) =$$

$$= \mathcal{B}(\mathcal{A}x_1) + \mathcal{B}(\mathcal{A}x_2) = \mathcal{B}\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}\mathcal{A}x_2.$$

Так же легко проверить и однородность:$\mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha(\mathcal{B}\mathcal{A}x)$.

Теорема 2. Пусть $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}\} \subset H(X, Y)$, $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}\} \subset H(Y, Z)$ и $\alpha \in F$, тогда имеют место равенства:

1. $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{B}\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}\mathcal{A}_2$;
2. $(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)\mathcal{A} = \mathcal{B}_1\mathcal{A} + \mathcal{B}_2\mathcal{A}$;
3. $\alpha(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\alpha\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{B}(\alpha\mathcal{A})$;
4. Пусть U - линейное пространство над полем F и $\mathcal{C} \in H(Z, U)$, тогда $\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}$.

Доказательство. Ассоциативность верна для любых трех отображений. Первые три равенства доказываются по одной схеме. Докажем, например, первое. Пусть x - произвольный элемент из X, тогда из справедливости равенств

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)x = \mathcal{B}((\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2x) =$$

$$= \mathcal{B}(\mathcal{A}_1x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}_2x) = (\mathcal{B}\mathcal{A}_1)x + (\mathcal{B}\mathcal{A}_2)x = (\mathcal{B}\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}\mathcal{A}_2)x$$

следует, что $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{B}\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}\mathcal{A}_2$. Заметим, что линейность отображений $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не использована. При проверке справедливости следующих равенств обратите также на это внимание.

Предположим теперь, что пространства X, Y, Z конечномерны,$u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - база X, $v = \{v_1, \ldots, v_m\}$ - база Y, $w = \{w_1, \ldots, w_q\}$ - база Z.

Теорема 3. Если $\mathcal{A} \in H(X, Y)$, $\mathcal{B} \in H(Y, Z)$ и $\mathcal{A} \overset{u,v}{\longleftrightarrow} A = (\alpha_{ik}) \in F^{m\times n}$, $\mathcal{B} \overset{v,w}{\longleftrightarrow} B \in F^{q\times m}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A} \overset{u,w}{\longleftrightarrow} C \in F^{q\times n}$, то $C = B \cdot A$.

Таким образом, матрица произведения $\mathcal{B}\mathcal{A}$ линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению $B \cdot A$ матриц сомножителей.

Доказательство. По условию $\mathcal{A}u = v \cdot A$, $\mathcal{B}v = w \cdot B$, $(\mathcal{B}\mathcal{A})u = w \cdot C$. Так как $\mathcal{A}u_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}v_i$, то $\mathcal{B}\mathcal{A}u_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}\mathcal{B}v_i$. Поэтому $(\mathcal{B}\mathcal{A})u = \mathcal{B}v \cdot A = (w \cdot B) \cdot A = w \cdot (B \cdot A)$. Отсюда $C = B \cdot A$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $\{A, A_1, A_2\} \subset F^{m\times n}$, $\{B, B_1, B_2\} \subset F^{q\times m}$, $C \in F^{s\times q}$ и $\alpha \in F$, тогда имеют место равенства:

1. $B(A_1+A_2)=BA_1+BA_2$;
2. $(B_1+B_2)A=B_1A+B_2A_1$;
3. $\alpha(BA)=(\alpha B)A=B(\alpha A)$;
4. $C(BA)=(CB)A$.

Доказательство. Сопоставим с каждой из матриц, участвующих в равенствах 1,2,3,4, однозначно определенное линейное отображение, а затем воспользуемся теоремами 2 из §3.1; 3 и 2 из §3.3.

Для формулировки следующей теоремы необходимы пространства: произвольное Z и конечномерные X, Y размерностей n и m соответственно.

Теорема 4. Если $A \in H(X,Y)$, $B \in H(Y,Z)$, то

$$r_A + r_B - m \leq r_{BA} \leq \min\{r_A, r_B\}.$$

Доказательство. Так как $(BA)X = B(AX) \subset BY$, то $r_{BA} \leq r_B$. Очевидно, при линейном отображении размерность пространства не увеличивается, поэтому $\dim B(AX) \leq \dim AX$, т.е.$r_{BA} \leq r_A$. Второе неравенство доказано.

Обозначим через B_1 ограничение отображения B на подпространство AX. Следовательно,$r_{B_1} = r_{BA}$, $d_{B_1} = \dim(AX)_{B_1}$ и по теореме 2 §3.2 $r_{B_1} + d_{B_1} = r_A$. Очевидно, $d_{B_1} \leq d_B$. Отсюда $r_A - r_{BA} \leq m - r_B$. Теорема 4 доказана.

Так как ранг линейного отображения совпадает с рангом соответствующей ему матрицы, то имеем

Следствие. Если $A \in F^{m\times n}, B \in F^{q\times m}$, то

$$r(A)+r(B)-m \leq r(BA) \leq \min\{r(A), r(B)\} \text{(неравенство Сильвестра).}$$

Следствие 2. Если $A \in F^{m\times n}$, S и T-обратимые матрицы порядков m и n, то $r(SA)=r(AT)=r(A)$.

Упр. 1. Если $A \in H(X,Y), B \in H(Y,Z)$, то $d_{BA} \leq d_A + d_B$.

Упр. 2. Если $\{A_1, A_2\} \subset H(X,Y)$, то $r_{A_1+A_2} \leq r_{A_1} + r_{A_2}$.

§3.4. Инвариантные подпространства и собственные векторы линейных операторов

Параграф посвящен более детальному изучению линейных отображений пространств в себя. Если X - линейное пространство над полем F, то элементы из $H(X,X)=H(X)$ будем называть *линейными операторами*. Операции сложения, произведения линейных операторов, умножения на скаляр из поля всегда выполнимы в $H(X)$. Отметим сначала свойства $H(X)$, которые прямо следуют из результатов, полученных в предыдущих параграфах.

1. $H(X)$ является линейным пространством над полем F; если X конечномерно и имеет размерность n, то $H(X)$ изоморфно $F^{n\times n}$ и поэтому $\dim H(X) = n^2$.

2. $H(X)$ является ассоциативным кольцом; если X конечномерно и имеет размерность n, то кольцо $H(X)$ изоморфно матричному кольцу $F^{n\times n}$.

Упр.1. Пусть $\mathcal{A}$-элемент из $H(X)$. Оператор $\mathcal{A}$ назовем обратимым, если найдется такой оператор $\mathcal{B}$ из $H(X)$, что $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ - оператор, оставляющий все элементы на месте. Оператор $\mathcal{B}$ в этом случае назовем обратным к $\mathcal{A}$. Для того чтобы линейный оператор был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $X_{\mathcal{A}} = \{0_X\}$ и $\mathcal{A}X = X$. Если X конечномерно, то для обратимости $\mathcal{A}$ достаточно выполнимости одного из этих условий; очевидно также, что $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда матрица, ему соответствующая, имеет отличный от нуля определитель. Доказать.

Замечание. Если $\mathcal{A}$ - линейное отображение конечномерного пространства X в себя, то для определения матрицы, соответствующей $\mathcal{A}$, нет необходимости фиксировать два базиса. Если $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - базис пространства X, то матрица отображения $\mathcal{A}$ определяется равенством

$$\mathcal{A}u_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}u_i; \quad \mathcal{A} \xleftrightarrow{u} A = (\alpha_{ik}) \in F^{n\times n}.$$

3. Если u и v - две базы пространства X, A и B - соответственно матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ относительно этих баз, то $B = S^{-1}AS$, где S - матрица перехода от базы u к базе v.

Упр. 2. Матрица B называется *подобной* матрице A, если найдется такая обратимая матрица S, что $B = S^{-1}AS$. Показать, что отношение подобия матриц на $F^{n\times n}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

В основе изучения линейных операторов лежат понятия инвариантного подпространства и собственного вектора. Подпространство N линейного пространства X называется *инвариантным* относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, если для любого элемента x из N элемент $\mathcal{A}x$ также принадлежит N.

Лемма 1. Если линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны: $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то ядро $X_{\mathcal{B}}$ и область значений $\mathcal{B}X$ оператора $\mathcal{B}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство. Для x из $X_{\mathcal{B}}$ имеем $\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = (\mathcal{BA})x = (\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x) = \mathcal{A}0_X = 0_X$. Следовательно, $\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = 0_X$ и $\mathcal{A}x \in X_{\mathcal{B}}$. Инвариантность $\mathcal{B}X$ доказывается аналогично.

Пусть $f = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$ - многочлен из кольца $F[t]$ и $\mathcal{A} \in H(X)$, тогда линейный оператор $\alpha_0\mathcal{E} + \alpha_1\mathcal{A} + \ldots \alpha_n\mathcal{A}^n$ будем называть значением многочлена f для оператора $\mathcal{A}$ и обозначать $f(\mathcal{A})$.

Следствие. Если $f \in F[t]$, то $X_{f(\mathcal{A})}$ и $f(\mathcal{A})X$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$. В частности, инвариантны и $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}}$ для всех α из F, $X_{\mathcal{A}^k}$, $\mathcal{A}^k X$ для любого $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Зафиксируем скаляр α из поля F. Если $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}} \neq \{0_X\}$, то α называют *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$, а каждый отличный от 0_X элемент x из $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}}$ называют *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, соответствующим α. Таким образом,α из F является собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если найдется такой $x \neq 0_X$ из X, что $\mathcal{A}x = \alpha x$.

Теорема 1. Собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство проведем индукцией по числу собственных векторов. База индукции верна по определению. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующие попарно различным собственным значениям $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\quad n > 1$. Предположим, что для систем собственных векторов с числом элементов $\leq n-1$ наше утверждение доказано.

Пусть

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_n x_n = 0_X$$

для $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\} \subset F$. Тогда

$$0_X = (\mathcal{A} - \alpha_n\mathcal{E})0_X = (\mathcal{A} - \alpha_n\mathcal{E})(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_n x_n) =$$

$$= \lambda_1(\alpha_1 - \alpha_n)x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)x_{n-1}.$$

Так как $\alpha_k - \alpha_n \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n-1$ по индуктивному предложению $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$. Теперь в исходном равенстве $\lambda_n x_n = 0_X$ элемент $x_n \neq 0_X$, поэтому $\lambda_n = 0$. Что и требовалось доказать.

Для формулировки следующей теоремы и последующего изучения свойств линейных операторов введем одно из центральных понятий линейной алгебры. Пусть $A = (\alpha_{ik}) \in F^{n\times n}$. Раскрыв определитель $|A - \lambda E|$, получим многочлен

$$\varphi_A = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}S_1\lambda^{n-1} + \ldots + S_n,$$

где $S_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}, \ldots, S_n = |A|$. Многочлен φ_A называют *характеристическим* многочленом матрицы A, а совокупность всех его корней (некоторые из них могут не принадлежать F) назовем *спектром* матрицы A и обозначим через $S(A)$.

Лемма 2. Если матрица B подобна матрице A, то $\varphi_B = \varphi_A$.

Доказательство. Пусть T - такая обратимая матрица из $F^{n \times n}$, что $B = T^{-1}AT$. Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\varphi_B = |B - \lambda E| = |T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| =$$

$$= |T^{-1}|\varphi_A|T| = |T^{-1}T|\cdot\varphi_A = \varphi_A.$$

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – линейный оператор пространства X, $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - база X и $A \in F^{n \times n}$ - матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно базы u. *Характеристическим многочленом* оператора $\mathcal{A}$ будем называть характеристический многочлен его матрицы: $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_A$. Так как матрицы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие разным базам пространства, подобны, то введенное определение характеристического многочлена линейного оператора корректно. Таким образом, имеет смысл говорить и о спектре линейного оператора: $S(\mathcal{A}) = S(A)$.

Зафиксируем матрицу A линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного пространства X над полем F относительно некоторой базы $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Теорема 2. Для того чтобы скаляр α из F был собственным значением оператора $\mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы α был корнем характеристического многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть x - собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий α : $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})x = 0_X$. Если ξ - столбец координат элемента x относительно базы u, то $(A - \alpha E)\xi = 0_{F^n}$ (см.теорему 3 §3.1). Так как $x \neq 0_X$, то столбец ξ ненулевой; поэтому определитель матрицы $A - \alpha E$ должен быть равен нулю. Следовательно, $\varphi_{\mathcal{A}}(\alpha) = |A - \alpha \cdot E| = 0$.

Достаточность. Предположим теперь, что $\varphi_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$. Тогда однородная система $(A - \alpha E)(x_1, \ldots, x_n)^T = (0, \ldots, 0)^T$ линейных уравнений имеет ненулевое решение. Пусть ненулевой столбец $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ решает эту систему: $(A - \alpha E)\xi = 0_{F^n}$. Тогда для ненулевого элемента

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n$$

будет справедливо равенство $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})x = 0_X$. Следовательно, α - собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а построенный элемент x - собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий α.

Доказанная теорема сводит отыскание собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного пространства X к вычислению корней многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}$, расположенных в поле F, а отыскание собственных векторов $\mathcal{A}$ - к решению системы однородных линейных уравнений с матрицей $A - \alpha E$. Матрицу $A - \lambda E$ принято называть характеристической матрицей матрицы A.

Следствие. Если N - конечномерное инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ подпространство линейного пространства X над полем комплексных чисел C, то $\mathcal{A}$ обладает собственным вектором, расположенным в N.

Не каждый линейный оператор обладает собственными векторами. Например, оператор пространства R^2, определенный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\varphi_{\mathcal{A}} = (1-\lambda)^2 + 4$ не имеет корней в поле R.

В приведенных ниже упражнениях X - конечномерное линейное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in H(X)$. Пусть N - инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство из X. Через $\varphi_{\mathcal{A}}^N$ обозначим характеристический многочлен ограничения $\mathcal{A}$ на N; $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{A}}^X$.

Упр. 3. Матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ относительно базы $\{u_1, \ldots, u_n\}$ пространства X тогда и только тогда имеет полураспавшийся вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A_1 \in F^{k\times k}, 1 \le k < n,$$

когда подпространство $N = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_k)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Какой вид имеет матрица, если и $M = \mathcal{L}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$?

Упр. 4. Показать, что $\varphi_{\mathcal{A}}^N | \varphi_{\mathcal{A}}^X$. Если X является прямой суммой подпространств $X_1, \ldots, X_S$, инвариантных относительно $\mathcal{A}$, то $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{A}}^{X_1} \ldots \varphi_{\mathcal{A}}^{X_s}$.

Многочлен f из $F[\lambda]$ называется $\mathcal{A}$ - аннулятором элемента x из X, если $f(\mathcal{A})x = 0_X$. $\mathcal{A}$ - аннулятор элемента x наименьшей степени, имеющий старший коэффициент равный единице, называется минимальным $\mathcal{A}$ - аннулятором x и обозначается через $m_{\mathcal{A}}^x$. Аналогично определяются $\mathcal{A}$ - аннулятор пространства X и минимальный $\mathcal{A}$ - аннулятор X, который обозначим $m_{\mathcal{A}}^X$.

Упр. 5. Для $x \in X$ и $\mathcal{A} \in H(X)$ построим последовательность: $x_0 = x$, $x_k = \mathcal{A}x_{k-1}, k \in \{1, 2, \ldots\}$. Если система $\{x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}\}$, линейно независима, а

$$\mathcal{A}x_{s-1} = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{s-1} x_{s-1},$$

то $N = \mathcal{L}(x_0, x_1, \ldots, x_{s-1})$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, $m_{\mathcal{A}}^x = \lambda^S - \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} - \ldots - \alpha_0$ и $\varphi_{\mathcal{A}}^N = (-1)^s m_{\mathcal{A}}^x$.

Упр. 6. Показать: если $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - база пространства X, то

$$m_{\mathcal{A}}^X = [m_{\mathcal{A}}^{u_1}, \ldots, m_{\mathcal{A}}^{u_n}].$$

Из упражнений 4,5 и 6 следует

Теорема Гамильтона - Кели. Каждый линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного пространства является "корнем" своего характеристического многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$-такой оператор, что $\mathcal{O}x = 0_X$ для любого x из X.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства X называется *диагонализуемым* (оператором простой структуры), если в X имеется база из собственных векторов $\mathcal{A}$.

Упр. 7. Пусть $S(\mathcal{A}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \subset F$, $k_i = \dim X_{\mathcal{A}-\alpha_i\mathcal{E}}$, ℓ_i - кратность корня α_i. Доказать что: а) $k_i \le \ell_i$; б) для того чтобы линейный оператор $\mathcal{A}$ был диагонализуем, необходимо и достаточно, чтобы $k_i = \ell_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$.

§3.5. Нормальные формы

Каждому линейному оператору $\mathcal{A}$ конечномерного линейного пространства X над полем F отвечает класс подобных матриц из $F^{n\times n}$, где $n = \dim X$. Естественно в этом классе найти наиболее простую матрицу, иными словами, в пространстве X найти такую базу, относительно которой матрица оператора $\mathcal{A}$ наиболее простая. Такой матрицей будет матрица Жордана, если спектр $S(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ лежит в поле F.

Пусть α - элемент поля F. Квадратную матрицу G_n^α порядка n вида

$$G_n^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

называют *клеткой Жордана*. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ - набор скаляров поля F, $n_1, \dots, n_r$ - натуральные числа, то матрицу вида

$$G_{n_1,\dots,n_r}^{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = \begin{pmatrix} G_{n_1}^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{n_2}^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{n_r}^{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей Жордана*.

Теорема о Жордановой нормальной форме. Если $\mathcal{A}$-такой линейный оператор конечномерного линейного пространства X, что

$S(A) \subset F$, то в X существует такая база, относительно которой матрица оператора A есть матрица Жордана.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений и новых понятий.

Ради простоты записи введем обозначения: $L_i = X_{A^i}$ - ядро и $M_i = A^i X$ - область значений оператора A^i, $i \in \{1, 2 \ldots, \}$. Очевидно, $L_i \subseteq L_{i+1}$, $M_i \supseteq M_{i+1}$, при этом считаем $\{0_X\} = L_0$ и $X = M_0$.

Лемма 1. Если для натурального k $L_k = L_{k+1}$, то а) $L_{k+1} = L_{k+i+1}$ для любого $i \in \{0, 1, \ldots, \}$; б) $M_k \cap L_k = \{0_X\}$; в) если размерность X конечна, то $X = M_k \dot{+} L_k$.

Доказательство. а) Пусть найдется такое $i \geq 1$, что разность $L_{k+i+1} \setminus L_{k+i}$ содержит элемент x. Тогда элемент $y = A^i x$ лежит в $L_{k+1} \setminus L_k$. Для доказательства б) возьмем элемент y из $M_k \cap L_k$. В X имеется такой элемент x, что $y = A^k x$. Тогда $x \in L_{2k}$. Но $L_{2k} = L_k$, поэтому $y = 0_X$. Утверждение в) следует из известного равенства

$$\dim X = \dim L_k + \dim M_k.$$

Упр.1. Показать, что если N - такое инвариантное относительно A подпространство, что $X = N \dot{+} L_k$, то $N = M_k$.

Лемма 2. Пусть A и B - перестановочные операторы произвольного линейного пространства X, тогда если $X_A \cap X_B = \{0_X\}$, то для любых k и ℓ $X_{A^k} \cap X_{B^\ell} = \{0_X\}$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любого натурального ℓ $X_A \cap X_{B^\ell} = \{0_X\}$. Пусть $x \in X_A \cap X_{B^\ell}$ и $x \neq 0_X$, то существует такое $\ell_1 \leq \ell$, что $x \in X_{B^{\ell_1}} \setminus X_{B^{\ell_1 - 1}}$, т.е. $B^{\ell_1} x = 0_X$, но $y = B^{\ell_1 - 1} x \neq 0_X$. В силу инвариантности X_A относительно B, $y \in X_A$. Но по построению y $y \in X_B$. Что противоречит условию. Аналогично доказывается равенство $X_{A^k} \cap X_{B^\ell} = \{0_X\}$ для любого натурального k.

Пусть спектр $S(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ линейного оператора A пространства X содержится в поле F. Таким образом,

$$\varphi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_s)^{n_s}, n_1 + \ldots + n_s = n = \dim X.$$

Обозначим через A_ν оператор $A - \alpha_\nu \mathcal{E}$, $1 \leq \nu \leq s$. Так как пространство X конечномерно, то найдется такое $k_\nu \geq 1$, что

$$\{0_X\} = X_{A_\nu^0} \subset X_{A_\nu^1} \subset \ldots \subset X_{A_\nu^{k_\nu}} = X_{A_\nu^{k_\nu + 1}}.$$

Подпространство $K_\nu = X_{A_\nu^{k_\nu}}$ называют *корневым*, соответствующим α_ν, а его элементы - корневыми векторами оператора A.

Теорема о корневом разложении. Если $K_1, \ldots, K_s$ - корневые подпространства оператора A, соответствующие элементам спектра

$S(\mathcal{A}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, то

$$X = K_1 \dot{+} \ldots \dot{+} K_s.$$

Доказательство. Так как при $\nu \neq \mu$ $X_{\mathcal{A}_\nu} \cap X_{\mathcal{A}_\mu} = \{0_X\}$, то $K_\nu \cap K_\mu = \{0_X\}$. Покажем теперь, что $K_\nu \subseteq M_\mu = \mathcal{A}_\mu^{k_\mu} X$, $\nu \neq \mu$. Можно считать, что $\mu = 1$. По лемме 1.b для любого z из K_ν найдутся такие u из K_1 и v из M_1, что $z = u + v$. Отсюда $\mathcal{A}_\nu^{k_\nu} z = \mathcal{A}_\nu^{k_\nu} u + \mathcal{A}_\nu^{k_\nu} v = 0_X$. Так как K_1 и M_1 инвариантны относительно $\mathcal{A}_\nu$, то $\mathcal{A}_\nu^{k_\nu} u = 0_X$ и $\mathcal{A}_\nu^{k_\nu} v = 0_X$. Таким образом, $u \in K_1 \cap K_\nu$; поэтому $z = v \in M_1$. Снова по лемме 1.b $X = K_2 \dot{+} M_2$; тогда включение $K_2 \subseteq M_1$ влечет $M_1 = K_2 \dot{+} (M_1 \cap M_2)$; следовательно,

$$X = K_1 \dot{+} M_1 = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} (M_1 \cap M_2).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$X = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} \ldots \dot{+} K_s \dot{+} M, \text{ где} M = M_1 \cap \ldots \cap M_s.$$

Но каждое ненулевое инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство нетривиально пересекается с одним из собственных (потому и корневых) подпространств; поэтому $M = \{0_X\}$. Теорема о корневом разложении доказана.

Пусть M - подпространство из X. Систему $\{a_1, \ldots, a_m\}$ элементов из X называют *линейно независимой над* M, если из $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m \in M$, $\alpha_i \in F$ следует $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

Лемма 3. Если система $\{x_1, \ldots, x_m\}$ элементов из L_{i+1} линейно независима над L_i, то система $\{\mathcal{A}x_1, \ldots, \mathcal{A}x_m\}$ из L_i линейно независима над L_{i-1}.

Доказательство. Пусть $\alpha_1(\mathcal{A}x_1) + \ldots + \alpha_m(\mathcal{A}x_m) \in L_{i-1}$, или $\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m) \in L_{i-1}$. Поэтому $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m \in L_i$. Отсюда по условию $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

Система $\{u_1, \ldots, u_m\}$ элементов пространства X называется *базой X над подпространством* M, если $\{u_1, \ldots, u_m\}$ линейно независима над M и

$$X = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_m) + M.$$

Лемма 4. Пусть M - подпространство конечномерного пространства X; тогда каждую линейно независимую над M систему $\{a_1, \ldots, a_m\}$ можно дополнить до базы X над M.

Доказательство. Если $\{x_1, \ldots, x_m\}$ - база подпространства M, то система $\{x_1, \ldots, x_m, a_1 \ldots, a_k\}$ линейно независима в X. Дополним ее до базы X элементами $\{b_1 \ldots, b_l\}$. Система $\{a_1, \ldots, a_k, b_1 \ldots, b_l\}$ будет искомой базой X над M.

Доказательство теоремы о Жордановой нормальной форме линейного оператора достаточно провести для корневого подпространства этого оператора, например K_1.

В $K_1 = X_{\mathcal{A}_1^{k_1}}$ берем базу $\{u_1^k, \dots, u_{r_k}^k\}$, $k = k_1$ этого пространства над $X_{\mathcal{A}_1^{k-1}}$. Линейно независимую над $X_{\mathcal{A}_1^{k-2}}$ систему $u_1^{k-1} = \mathcal{A}_1 u^k, \dots, u_{r_k}^{k-1} = \mathcal{A}_1 u_{r_k}^k$ дополним элементами $u_{r_k+1}^{k-1}, \dots, u_{r_{k-1}}^{k-1}$ до базы $X_{\mathcal{A}_1^{k-1}}$ над $X_{\mathcal{A}_1^{k-2}}$. Применим к элементам $\{u_1^{k-1}, \dots, u^{k-1}{}_{r_k}, u_{r_k+1}^{k-1}, \dots, u_{r_{k-1}}^{k-1}\}$ оператор $\mathcal{A}_1$ и полученную линейно независимую над $X_{\mathcal{A}_1^{k-2}}$ систему дополним до базы $X_{\mathcal{A}_1^{k-2}}$ над $X_{\mathcal{A}_1^{k-3}}$. Продолжая этот процесс до построения базы пространства $X_{\mathcal{A}_1}$, тем самым завершим построение базы корневого пространства K_1. Элементы этой базы располагаем следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
u_1^k, \dots, u_{r_k}^k \\
u_1^{k-1}, \dots, u_{r_k}^{k-1}, u_{r_k+1}^{k-1}, \dots, u_{r_{k-1}}^{k-1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
u_1^2, \dots, u_{r_k}^2, \; u_{r_k+1}^2, \dots u_{r_{k-1}}^2, \dots u_{r_3+1}^2, \dots, u_{r_2}^2 \\
u_1^1, \dots, u_{r_k}^1, \; u_{r_k+1}^1, \dots, u_{r_{k-1}}^1, \dots, u_{r_3+1}^1, \dots, u_{r_2}^1, u_{r_2+1}^1, \dots, u_{r_1}^1 .
\end{array}
$$

$K_1 = X_{\mathcal{A}_1^k}$ является прямой суммой инвариантных относительно $\mathcal{A}$ линейных оболочек элементов этой базы, стоящих в столбцах таблицы, а матрицы оператора $\mathcal{A}$ на этой линейной оболочке есть клетка Жордана. Проиллюстрируем это на $\mathcal{L}(u_1^1, \dots, u_1^k) = Z_1$. $\mathcal{A}_1 u_1^v = u_1^{v-1}$ или $\mathcal{A}u_1^v = \alpha_1 u_1^v + u_1^{v-1}$, $v \in \{1, 2, \dots, k\}$, при этом считаем, что $u_1^0 = 0_X$. Таким образом, оператору $\mathcal{A}$ на Z_1 относительно базы $\{u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^k\}$ отвечает матрица

$$
G_k^{\alpha_1} = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_1 & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1
\end{pmatrix}.
$$

Теорема о Жордановой нормальной форме доказана.

Следствие. Если $A \in F^{n \times n}$ и $S(A) \subset F$, то существует такая обратимая матрица $T \in F^{n \times n}$, что $T^{-1}AT = G_A$ - матрица Жордана.

Задачи

1. Пусть X - конечномерное, Y - любое линейное пространство. Показать, что:

а) для любого подпространства H из X найдется такое $\mathcal{A} \in H(X,Y)$, что $X_{\mathcal{A}} = H$;

б) для любого конечномерного подпространства K из Y $\dim K \leq \dim X$ найдется такое $\mathcal{B} \in H(X,Y)$, что $\mathcal{B}X = K$.

2. Пусть X и Y - линейные пространства, $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ - их базы, $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ - линейно независимая система из X, $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ - произвольная из Y, A и B - матрицы из столбцов элементов из a и b соответственно в базах u и v (в записи $a = u \cdot A$, $b = v \cdot B$), $\mathcal{A}$ - такое линейное отображение из X в Y, что $\mathcal{A}a_i = b_i$, $1 \leq i \leq n$ (кратко $\mathcal{A}a = b$). Показать: если $\mathcal{A} \xleftrightarrow{u,v} C$, то $C = BA^{-1}$.

3. Пусть $\mathcal{A} \in H(X,Y)$ и L - подпространство из X, тогда

а) $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) = L + X_{\mathcal{A}}$;

б) если $L \cap X_{\mathcal{A}} = \{0_X\}$, то $L \cong \mathcal{A}(L)$.

4. Пусть f - ненулевой линейный функционал, определенный на линейном пространстве X. Показать, что для любого a из $X \setminus X_f$ справедливо прямое разложение: $X = X_f \dotplus \mathcal{L}(a)$.

5. Показать, что для любого $\mathcal{A}$ из $H(X,Y)$ можно найти такое линейное пространство Z, что $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ - линейное отображение X на Z, $\mathcal{C}$ - изоморфное вложение Z в Y. Если $r_{\mathcal{A}}$ - конечен, то $r_{\mathcal{C}} = r_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{A}} = \dim Z$.

6. Доказать: для того чтобы матрица $A \in F^{m \times n}$ имела ранг r, необходимо и достаточно, чтобы $A = B \cdot C$, где $B \in F^{m \times r}$, $C \in F^{r \times n}$, $r(B) = r(C) = r$. Такое представление A называется *скелетным разложением* матрицы A.

7. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - отображения пространства многочленов $F[t]$, определенные формулами

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{t}[f(t) - f(0)], \quad \mathcal{B}f = t \cdot f, \quad f \in F[t].$$

Показать: а) линейность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$;

б) $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$, $\mathcal{B}\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$;

в) $\mathcal{A}$ не обладает обратным.

8. Если $\mathcal{A}$ такой линейный оператор пространства X, что $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$), то $X = X_{\mathcal{A}} \dotplus X_{\mathcal{A}-\mathcal{E}}$ ($X = X_{\mathcal{A}+\mathcal{E}} \dotplus X_{\mathcal{A}-\mathcal{E}}$).

9. Пусть A и B - такие матрицы из $F^{n \times n}$, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$ ($A^2 = B^2 = E$). Доказать: для того чтобы A и B были подобны, необходимо и достаточно, чтобы $r(A - E) = r(B - E)$.

10. Пусть относительно некоторой базы пространства X матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна с различными диагональными элементами. Найти все инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства из X; показать, что их число равно 2^n; $n = \dim X$.

11. Доказать: если каждый элемент пространства X над полем F является собственным вектором линейного оператора $\mathcal{A}$, то в F найдется такой скаляр α, что $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{E}$.

12. Доказать, если линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства X над F перестановочен со всеми линейными операторами X, то $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{E}$, $\alpha \in F$.

13. Пусть X - конечномерное пространство над полем C $\mathcal{A} \in H(X)$. Показать, что в X имеется такой ряд инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств

$$\{0_X\} = L_0 \subset \ldots \subset L_{n-1} \subset L_n = X,$$

что $\dim L_k = k$. Какова матрица $\mathcal{A}$ относительно базы $\{u_1, \ldots, u_n\}$ пространства X, если $u_k \in L_k \setminus L_{k-1}$.

14. Найти Жорданову матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного пространства над полем F, если $\mathcal{A}$ имеет одно, и притом одномерное, собственное пространство.

15. Дифференцирование $\mathcal{D}$ является линейным оператором пространства $F_n[t]$ всех многочленов над полем F степени $\leq n$. Найти:

а) собственные значения и собственные векторы $\mathcal{D}$;

б) все инвариантные относительно $\mathcal{D}$ подпространства;

в) матрицу Жордана оператора $\mathcal{D}$.

16. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного пространства X является оператором простой структуры. Показать, что $X = X_{\mathcal{A}} \dot{+} \mathcal{A}X$.

17. Доказать: линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного пространства X над полем C тогда и только тогда имеет диагональную матрицу относительно некоторого базиса, когда для любого α из $S(\mathcal{A})$ имеет место равенство $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}} = X_{(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^2}$.

18. Найти Жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Пусть X и Y - произвольные линейные пространства, $\mathcal{A}$ - линейное отображение из X в Y, причем имеются такие подпространства P из X и Q из Y, что $X = X_{\mathcal{A}} \dot{+} P$, $Y = \mathcal{A}X \dot{+} Q$.

Показать, что ограничение $\mathcal{A}_1$ отображения $\mathcal{A}$ на P есть биекция P на $\mathcal{A}X$. Обозначим через π проекцию Y на $\mathcal{A}X$ параллельно Q, через $\mathcal{I}$- тождественное вложение P в X и положим $\mathcal{B} = \mathcal{I}\mathcal{A}_1^{-1}\pi$. Показать, что $\mathcal{A}\mathcal{B} = \pi$, $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{R}$ - проекция X на P параллельно $X_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Отображение $\mathcal{B}$ называют *полуобратным* к $\mathcal{A}$ относительно подпространств P и Q.

20. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - такие линейные отображения соответственно из X в Y и из Y в X, что $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}$. Положим $P = \mathcal{B}Y$ и $Q = Y_{\mathcal{B}}$. Показать, что $\mathcal{B}$ является полуобратным отображением к $\mathcal{A}$ относительно P и Q.

21. Показать, что отображение $f : X \to X/H$, $f(a) = a + H$, $a \in X$ является линейным.

22. Пусть X и Y - произвольные линейные пространства, $\mathcal{A} \in H(X,Y)$. Показать, что отображение $\varphi : X/X_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}X$, $\varphi(x + X_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}x$, $x \in X$ является изоморфным отображением $X/X_{\mathcal{A}}$ на $\mathcal{A}X$. Если X - конечномерно, то $\dim X = \dim \mathcal{A}X + \dim X_{\mathcal{A}}$ (сравни с теоремой 2 из §3.2)

23. Пусть H и K- подпространства линейного пространства X. Показать, что $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$. Получить отсюда теорему о размерности суммы двух конечномерных подпространств.

ГЛАВА 4

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§4.1. Аксиомы и примеры

Многообразие свойств геометрических фигур объясняется в основном возможностью измерения длин отрезков и углов между ними. Теория линейных пространств не улавливает свойства изучаемых ею объектов, связанные с измерениями. Такие свойства принято называть метрическими. Основой изучения метрических свойств обычного пространства являются понятие скалярного произведения и его свойства: коммутативность, дистрибутивность, однородность и положительная определенность. Желая распространить идеи и методы метрической геометрии на линейные пространства, естественно в основу формирования аксиом, дополняющих аксиомы линейного пространства, положить отмеченные свойства скалярного произведения. Тем самым мы приходим к понятию евклидова пространства.

Линейное пространство X над полем вещественных чисел R называется *евклидовым* пространством, если наряду с аксиомами I_{1-5} и II_{1-5} линейного пространства выполняются следующие аксиомы.

III_1 Для любой пары элементов a и b из X однозначно определено число (a, b) из R.

III_2 $(a, b) = (b, a)$ для всех a и b из X.

III_3 $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$ для всех a_1, a_2 и b из X.

III_4 $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$ для всех α из R, a и b из X.

III_5 Для любого элемента a из X,если $a \neq 0_X$, то $(a, a) > 0$.

Число (a, b), удовлетворяющее аксиомам III_{1-5}, называют *скалярным произведением* элементов a и b пространства X.

Упр.1. Показать, что для произвольных элементов $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ евклидова пространства X и любых вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ имеет место формула

$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j).$$

Упр. 2. Показать,что

1) для любых a и b из X $(a, 0_X) = (0_X, b) = 0$;

2) если для любого элемента x из X $(x, a) = (x, b)$, то $a = b$.

Примеры. 1. Пространство V векторов относительно скалярного произведения $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ является евклидовым пространством. Выполнимость аксиом Ш_{1-5} доказывается в векторной алгебре.

2. В пространстве R^n вещественных колонн скалярное произведение двух его элементов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$ определим по формуле

$$(\xi_1 \eta) = \xi_1 \eta_1 + \dots, \xi_n \eta_n = \xi^T \eta.$$

Нетрудно проверить, что аксиомы Ш_{1-5} выполняются.

3. В пространстве $C[a, b]$ вещественных функций, заданных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, скалярное произведение функций f и φ определим по формуле

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt.$$

Из свойств определенного интеграла следует выполнимость аксиом евклидова пространства.

4. В пространстве R^ω всех бесконечных числовых последовательностей выделим подпространство R^ω_f тех последовательностей, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля. Для произвольных двух элементов $\xi = (\xi_i)$ и $\eta = (\eta_i)$ из R^ω_f скалярное произведение определим по формуле

$$(\xi, \eta) = \sum_i \xi_i \eta_i.$$

Как и в предыдущих примерах, выполнимость аксиом Ш_{1-5} проверяется без особого труда.

§4.2. Длина и ортогональность

Длиной (модулем, нормой) элемента x евклидова пространства X называется скаляр $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Легко подсчитать, что $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для $\alpha \in R$. Элемент, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Так как для любого $x \neq 0_x$ $||x|^{-1}x| = 1$, то каждый ненулевой элемент можно нормировать.

Более плодотворным для построения теории евклидовых пространств является понятие ортогональности. Элемент x будем называть *ортогональным* элементу y (в записи $x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Очевидно, если $x \perp y$, то $y \perp x$.

Упр.1. Записать длину элемента и условие ортогональности двух элементов в пространствах R^n и $C[a, b]$.

Теорема 1. Система $x_1, \ldots, x_n$ ненулевых, попарно ортогональных элементов евклидова пространства линейно независима.

Доказательство. Пусть имеет место равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_X$. Умножая обе части этого равенства на x_i, $i \in \{1, 2\ldots, n\}$, получим $\alpha_i(x_i, x_i) = 0$. Отсюда $\alpha_i = 0$.

Пусть M - произвольное непустое подмножество евклидова пространства X. *Ортогональным дополнением* к M в X называют множество $M^\perp$ всех элементов из X, которые ортогональны к каждому элементу из M:

$$M^\perp = \{x, x \in X, \text{для любого } y \in M, x \perp y\}.$$

Упр.2. Для любого подмножества M из X ортогональное дополнение $M^\perp$ к M является подпространством X и пересечение $M \cap M^\perp$ либо пусто, либо совпадает с $\{0_X\}$. В частности, если M - подпространство X, то $M \cap M^\perp = \{0_X\}$.

Теорема Пифагора. Для любого евклидова пространства X и любой пары его элементов a и b справедливы импликации

$$a \perp b \iff |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Доказательство. Справедливость обеих импликаций следует из равенств

$$|a+b|^2 = (a+b, a+b) = |a|^2 + 2(a,b) + |b|^2.$$

Система элементов A евклидова пространства X называется *ортогональной*, если любые два различных элемента из A ортогональны. Система A называется *ортонормированной*, если она ортогональна и все ее элементы имеют длину, равную 1.

Теорема об ортогонализации. Для любой линейно независимой последовательности $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ пространства X (конечной или бесконечной) можно построить такую ортогональную последовательность $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$, что для любого натурального n системы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$ линейно эквивалентны.

Доказательство. Полагаем $y_1 = x_1$. Далее построение необходимой последовательности идет по индукции. Пусть уже построена ортогональная система $\{y_1, \ldots, y_k\}$, эквивалентная системе $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Положим

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k, \ \alpha_i \in R.$$

$y_{k+1} \neq 0_X$, иначе $\{x_1, \ldots, x_k\} \vdash x_{k+1}$. Легко проверить, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ системы $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}\}$ линейно эквивалентны. Ортогональность y_{k+1} каждому $y_1, \ldots, y_k$ выполнится, если положить $\alpha_i = \frac{-(x_{k+1}, y_i)}{(y_i, y_i)}, 1 \le i \le k$. Индуктивное построение проведено,и теорема об ортогонализации доказана полностью.

Замечание. Если система $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ ортогональна, то по построению $y_1 = x_1, \ldots, y_k = x_k$ и $y_{k+1} = x_{k+1}$.

Упр.3. Если $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots, \}$ линейно независимая последовательность элементов евклидова пространства X, а $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ и $\{z_1, \ldots, z_n \ldots\}$-такие ортогональные последовательности элементов из X, что для любого натурального n системы $\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $\{z_1, \ldots, z_n\}$ линейно эквивалентны системе $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то для любого натурального k найдется такое вещественное α_k, что $z_k = \alpha_k y_k$.

§4.3. Конечномерные евклидовы пространства

Евклидово пространство называется конечномерным, если оно как линейное пространство конечномерно. Из теоремы об ортогонализации следует

Теорема 1. Всякую ортогональную систему элементов конечномерного евклидова пространства X можно дополнить до ортогональной базы X.

Следствие. Каждое конечномерное евклидово пространство обладает ортонормированной базой (ОНБ).

Теорема 2. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - ОНБ пространства X.

1. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ - столбец координат элемента x относительно $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то $\xi_i = (x, e_i)$, $1 \le i \le n$.

2. Если $\xi = (\xi, \ldots, \xi_1)^T$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ - столбцы координат элементов x и y соответственно, то

$$(x, y)_X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \xi^T \cdot \eta = (\xi, \eta)_{R^n}.$$

Доказательство. Элемент $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ перемножим с e_i и получим

$$(x, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j (e_j, e_i) = \xi_i,$$

так как $(e_j, e_i) = \delta_i^j$. Нетрудно вывести и второе равенство. Если по ходу изложения встречается не одно евклидово пространство, то в обозначение скалярного произведения вводим дополнительную букву, означающую то пространство, в котором определено это скалярное произведение. Из отмеченной в упражнении 1 формулы имеем

$$(x,y)_X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_1\eta_j(\ell_i,\ell_j) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n = (\xi,\eta)_{R^n}.$$

Правая часть этого равенства есть скалярное произведение столбцов ξ и η, определенное в R^n.

Формула для расчета скалярного произведения по координатам множителей приводит нас к понятию изоморфизма евклидовых пространств. Отображение φ евклидова пространства X в евклидово пространство Y называется изоморфным отображением X на Y, если :

1) φ есть изоморфизм X на Y как линейных пространств X и Y; 2) φ "сохраняет скалярное произведение", т.е. для любой пары x_1 и x_2 элементов пространства X имеет место равенство

$$(\varphi(x_1),\varphi(x_2))_Y = (x_1,x_2)_X.$$

Второе утверждение теоремы 2 означает, что отображение $x \to \xi$ конечномёрного пространства X размерности n на пространство столбцов R^n является изоморфизмом X на R^n как евклидовых пространств.

Упр.1. Два конечномерных евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Пусть $u = \{u_1,\ldots,u_n\}$ и $v = \{v_1,\ldots,v_n\}$ - ОНБ пространства X и $v_k = \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}u_i$. Как нам известно, матрица $S = (\sigma_{ik})$ из $R^{n\times n}$ перехода от базы u к базе v обратима. В данном случае можно дать более точную характеристику этой матрицы.

Теорема 3. Если S есть матрица перехода от ОНВ u к ОНВ v, то $S^T\cdot S = E$.

Доказательство. Так как $(v_k,v_\ell) = \delta_k^\ell$, то $\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}\sigma_{i\ell} = \delta_k^\ell$.
Эта система из n^2 равенств означает, что $S^T\cdot S = E$.
Матрицу S из $R^{n\times n}$ называют *ортогональной*, если $S^T\cdot S = E$.
Упр.2. Если S - ортогональная матрица, то $S\cdot S^T = E$ и $|S| = \pm 1$.

§4.4. Определитель Грама и теорема об ортогональном дополнении

Пусть $A = \{a_1,\ldots,a_k\}$ - система элементов евклидова пространства.

X. Определитель вида

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_k) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \dots & (a_k,a_k) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* системы A и обозначается

$$\Gamma(a_1,\dots,a_k)=\Gamma(A).$$

Теорема 1. Для того чтобы система $\{a_1,\dots,a_k\}$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma(A)=0$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(a_1,\dots,a_k)=0$. Тогда строки определителя Грама линейно зависимы. Следовательно, найдется такая система $\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ вещественных чисел (из которых хотя бы одно отлично от нуля), что

$$\lambda_1(a_1,a_i)+\lambda_2(a_2,a_i)+\dots+\lambda_k(a_k,a_i)=0,\ 1\le i\le k.$$

Внесем скаляры под знак скалярного произведения к первому множителю, а второй вынесем за скобки:

$$(\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ka_k,a_i)=0,\ 1\le i\le k.$$

Теперь i-е равенство умножим на λ_i и сложим:

$$(\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ka_k,\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ka_k)=0.$$

Отсюда $\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ka_k=0_X$. Таким образом, система $\{a_1,\dots,a_k\}$ линейно зависима. Необходимость условия очевидна,так как линейная зависимость системы $\{a_1,\dots,a_k\}$ влечет линейную зависимость строк определителя Грама.

Подпространство M евклидова пространства X называется *ортогонально дополняемым*, если $M\dotplus M^{\perp}=X$.

Теорема 2. Любое конечномерное подпространство M евклидова пространства X ортогонально дополняемо.

Доказательство. Пусть $\{u_1,\dots,u_n\}$ - некоторая ОНБ пространства M. Для элемента x из X построим элемент $x_M=\sum_{i=1}^{n}(x,u_i)u_i$ из M. Легко убедиться, что для любого $k\in\{1,\dots,n\}$ $(x-x_M,u_k)=0$. Поэтому $x-x_M\in M^{\perp}$. Соотношение $M\cap M^{\perp}=\{0_X\}$ завершает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Пусть M-ортогонально дополняемое подпространство евклидова пространства X. Тогда:а) для любого x из X найдется такой однозначно определенный элемент x_M из M, что $x-x_M\in M^{\perp}$;

б) для любого y из M $|x - x_M| \le |x - y|$, причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда $y = x_M$;

в) $M^{\perp\perp} = M$.

Доказательство. Утверждение "а" следует из прямого разложения $X = M \dot{+} M^{\perp}$. Если $y \in M$, то по теореме Пифагора $|x - y|^2 = |x - x_M|^2 + |x_M - y|^2$. Отсюда $|x - y| \le |x - x_M|$, а равенство выполняется в том и только в том случае, когда $|x_M - y|^2 = 0$ Наконец, равенство $M^{\perp\perp} \cap M^{\perp} = \{0_X\}$ показывает справедливость "в". Теорема 3 доказана.

Элемент x_M, построенный в теореме 3, называется ортогональной проекцией элемента x на подпространство M, а отображение $\mathcal{P} : \mathcal{P}x = x_M$ называется ортопроектором X на M. Число $h = |x - x_M|$ может служить мерой близости элемента x_M к x.

Упр.1. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - ОНВ подпространства M пространства X. Показать, что для любого x из X

$$|x|^2 \ge |(x, u_1)|^2 + \ldots + |(x, u_n)|^2.$$

Имея в виду приложения, укажем способ вычисления ортогональной проекции x_m элемента x на конечномерное подпространство $M = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$. Так как $x - x_M \in M^{\perp}$ и $x_M = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i$, то

$$(x - \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i, x_k) = 0,\ 1 \le k \le m.$$

Отсюда для вычисления коэффициентов $\xi_1, \ldots, \xi_m$ получаем следующую систему равенств:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1(x_1, x_1) + \ldots + \xi_m(x_m x_1) = (x, x_1) \\ \quad\vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \xi_1(x_1 x_m) + \ldots + \xi_m(x_m, x_m) = (x, x_m) \end{array}\right). \tag{11}$$

Эта система, как следует из теорем 2 и 3, всегда разрешима относительно $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Если $\{x_1, \ldots, x_m\}$ - база пространства M, то система (11) однозначно разрешима, так как ее определитель - определитель Грама $\Gamma(x_1, \ldots, x_m)$ - отличен от нуля.

Для вычисления h заметим, что

$$h^2 = (x - x_M, x - x_M) = (x - x_M, x) = (x, x) - (x_M, x).$$

Подставим в это равенство $\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m$ вместо x_M, получим

$$\xi_1(x_1, x) + \ldots + \xi_m(x_m, x) - (x, x) + h^2 = 0.$$

Дополним этим равенством систему (11). Расширенная система равенств показывает, что последняя колонка определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) \ldots (x_m, x_1) & (x, x_1) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ (x_1, x_m) \ldots (x_m, x_m) & (x, x_m) \\ (x_1, x) \ \ldots \ (x_m, x) & (x, x) - h^2 \end{vmatrix}$$

является линейной комбинацией m первых колонок, поэтому $\Delta = 0$. Легко видеть, что $\Delta = \Gamma(x_1, \ldots, x_m, x) - \Gamma(x_1, \ldots, x_m) \cdot h^2$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\{x_1, \ldots, x_m\}$ - база подпространства M евклидова пространства X, x - произвольный элемент из X.

Тогда координаты элемента x_M могут быть найдены из системы

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i, x_k) \xi_i = (x, x_k), \ 1 \leq k \leq m;$$

$h = |x - x_M|$ рассчитывается по формуле

$$h^2 = \frac{\Gamma(x_1, \ldots, x_m, x)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_m)}.$$

Упр.1. Для любой системы элементов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ евклидова пространства X $\Gamma(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$, причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда система $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно зависима.

Упр.2(теорема Коши - Буняковского). Для любой пары a и b элементов евклидова пространства X $|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$, причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда элементы a и b линейно зависимы.

В заключение рассмотрим три приложения.

А. *Квадратичные приближения.* Зафиксируем в пространстве $X = C[a, b]$ линейно независимую систему функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} = \Phi$. Элементы $\alpha_0\varphi_0 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$, $\alpha_i \in R$ линейной оболочки $M = \mathcal{L}(\Phi)$ называют *обобщенными* полиномами. По теореме 3 для любой функции f из $C[a, b]$ в $\mathcal{L}(\Phi)$ найдется, и притом только один, полином f_M, который ближе к f, нежели любой другой полином из $\mathcal{L}(\Phi)$, в смысле метрики, определенной скалярным произведением в $C[a, b]$. Координаты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ многочлена f_M могут быть найдены из системы

$$\sum_{i=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_k) \alpha_i = (f, \varphi_k), \ 0 \leq k \leq n.$$

Мера близости $h = |f - f_M|$ рассчитывается по формуле

$$h^2 = \frac{\Gamma(\varphi_0, \dots, \varphi_n, f)}{\Gamma(\varphi_0, \dots, \varphi_n)}.$$

На практике чаще всего используется либо степенная $\{1, t, \dots, t^n\}$, либо тригонометрическая $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos t, \sin t\}$ система функций. В первом случае мы получим квадратичные приближения функций алгебраическими многочленами, во втором - тригонометрическими.

Если система функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ортогональна, то координаты f_M подсчитываются из системы $\alpha_k(\varphi_k, \varphi_k) = (f, \varphi_k)$, $0 \leq k \leq n$. Таким образом,

$$f_M = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \cdot \varphi_k.$$

Коэффициенты этого многочлена $\alpha_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$ называются *коэффициентами Фурье* функции f относительно системы $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Из соотношения для h^2 имеем $h^2 = (f, f) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(\varphi_k, f)$. Отсюда

$$h^2 = (f, f) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2(\varphi_k, \varphi_k).$$

Из этой формулы видно, что с увеличением числа функций в ортогональной системе h^2 монотонно убывает.

Б. *Интерполирование с наименьшей квадратичной погрешностью.*

Через $\Phi[a, b]$ обозначим совокупность всех вещественных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$ - фиксированные точки этого отрезка, $R_k[t]$ - совокупность всех многочленов степени $\leq k$ с вещественными коэффициентами, $k \leq n$. Задача интерполирования с наименьшей квадратичной погрешностью: для произвольной функции F из $\Phi[a, b]$ найти такой многочлен P из $R_k[t]$, что квадратичное уклонение $h^2(F, P)$ функции F от P

$$h^2(F, P) = \sum_{i=0}^{n} (F(t_i) - P(t_i))^2$$

минимально. Для решения этой задачи воспользуемся результатами, вытекающими из теоремы об ортогональном дополнении. Отображение ω линейного пространства $\Phi[a, b]$ на R^{n+1}, определенное формулой

$$F \xrightarrow{\omega} f = (F(t_0), F(t_1), \dots, F(t_n)) \in R^{n+1},$$

является линейным; ядро $\Phi_0 = ker\omega$ состоит из функций F со свойством $F(t_0) = 0,\ F(t_1) = 0, \ldots, F(t_n) = 0$. Так как $\Phi_0 \cap R_k[t] = \{0\}$, то ограничение ω на $R_k[t]$ есть изоморфное вложение $R_k[t]$ в R^{n+1}. Обозначим через M образ $R_k[t]$ при отображении ω. Очевидно, $\dim M = k+1$. Определим скалярное произведение строк f и g в R^{n+1}, где $f = \omega(F)$ и $g = \omega(G)$, по формуле

$$(f,g) = \sum_{i=0}^{n} F(t_i) \cdot G(t_i).$$

Пусть теперь f_M - ортогональная проекция f на M. Тогда в $R_k[t]$ найдется однозначно определенный многочлен P, что

$$f_M = (P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_n)),$$

при этом $|f-p| \leq |f-q|$ для любого многочлена Q из $R_k[t]$, $\omega(P) = p$, $\omega(Q) = q$. Таким образом, построенный многочлен P решает поставленную задачу. Укажем способ его вычисления. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_k$– какая-либо база M; в частности, это могут быть образы степеней $1, t, \ldots, t^k$ при отображении ω. Коэффициенты линейной комбинации $\xi_0 p_0 + \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_k p_k = p$ определяются из системы

$$\sum_{i=0}^{k} (p_i, p_j)\xi_i = (f, p_j),\ 0 \leq j \leq k,$$

а мера близости $h^2(F,P)$ может быть рассчитана по формуле

$$h^2(F,P) = \frac{\Gamma(p_0, \ldots, p_k, f)}{\Gamma(p_0, \ldots, p_k)} = h^2.$$

Если база $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ подпространства M ортогональна, то

$$\xi_i = \frac{(f,p_i)}{(p_i,p_i)},\ 0 \leq i \leq k,\ h^2 = (f,f) - \sum_{i=0}^{k} \xi_i (p_i, p_i).$$

В. *Решения несовместных систем, псевдорешения.* Задачи, связанные с выводом эмпирических формул, расчетом нивелирных сетей, отысканием коэффициентов линейных зависимостей по результатам измерений, часто приводят к несовместным системам линейных уравнений.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha_{ik} \in R,\ \beta_i \in R.$$

Если $A = (\alpha_{ik})$ - матрица системы, $a^k = (\alpha_{ik}, \ldots, \alpha_{mk})^T$ — k—я колонка матрицы A, то данная система может быть записана в виде

$$x_1 a^1 + \ldots + x_n a^n = b, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \text{ или } Ax = b,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Для анализа поставленной задачи удобно рассмотреть упомянутое в §3.1 линейное отображение пространства колонн R^n в пространство $R^m: \ \xi \longrightarrow A\xi \in R^m,\ \xi \in R^n$. Пространство $M = \mathcal{L}(a^1, \ldots, a^n)$ из R^m совпадает с областью значений $AR^n = \{A\xi, \xi \in R^n\}$ построенного отображения. Очевидно, система $Ax = b$ несовместна тогда и только тогда, когда $b \notin M = AR^n$. По теоремам 2 и 3 об ортогональном дополнении в $M = AR^n$ найдется, и притом только один, элемент $b_M = A\xi$, для некоторого ξ из R^n, что $|b - b_M| \le |b - c|$ для любого c из M. Иными словами, в R^n существует такая колонка ξ, что $|b - A\xi| \le |b - A\eta|$ для любой колонки η из R^n, причем равенство выполняется только в случае $A\xi = A\eta$. Таким образом, построенная колонка ξ минимизирует функционал $|b - Ax|^2 = \Phi_0(x)$, называемый *функционалом невязки*. Элемент ξ из R^n, минимизирующий функционал невязки, называют *псевдорешением* системы $Ax = b$. Для доказательства теоремы, позволяющей вычислить псевдорешения, потребуются следующие равенства:

$$(A\xi, \eta)_{R^m} = (\xi, A^T\eta)_{R^n} \quad \text{для любых} \quad \xi \in R^n, \eta \in R^m;\ (AR^n)^\perp = R^m_{A^T}.$$

Справедливость первого равенства устанавливается вычислением правой и левой частей. Теперь импликации

$$\eta \in (AR^n)^\perp \Longleftrightarrow (\forall \xi \in R^n, (A^T\eta, \xi)_{R^n} = (\eta, A\xi)_{R^m} = 0) \Longleftrightarrow A^T\eta = 0$$

доказывают справедливость второго равенства.

Теорема 5. Для того чтобы столбец ξ из R^n был псевдорешением уравнения $Ax = b$, необходимо и достаточно, чтобы

$$A^T A\xi = A^T b.$$

Доказательство. Необходимость. Если ξ - псевдорешение уравнения $Ax = b$, то $b - A\xi \in (AR^n)^\perp = R^m_{A^T}$. Отсюда $A^T(\xi - A\xi) = 0$. Что и требовалось.

Достаточность. Если $A^T A\xi = A^T b$, то $b - A\xi \in (AR^n)^\perp$. Отсюда следует, что ξ минимизирует функционал Φ_0. Теорема 4 доказана.

Матричное уравнение $A^T Ax = A^T b$ называют *нормальным* уравнением для системы $Ax = b$. Дальнейшая теория псевдорешений будет изложена в следующей главе. Теперь же рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда ранг матрицы A совпадает с числом ее столбцов: $r(A) = n$. В этом случае матрица $A^T A$ обратима, так как ее определитель $|A^T A| = \Gamma(a^1, \ldots, a^n)$. Поэтому псевдорешение ξ уравнения $Ax = b$ однозначно определяется нормальным уравнением

$$\xi = (A^T A)^{-1} Ab.$$

В этом случае матрицу $(A^T A)^{-1} A$ называют *псевдообратной* к матрице A и обозначают A^+. Таким образом,$\xi = A^+ b$. Если матрица A квадратная и обратимая, то $A^+ = A^{-1}$, а псевдорешение системы $Ax = b$ совпадает с единственным решением $A^{-1}b$ этой системы.

§4.5. Унитарные пространства

Для нужд комплексного анализа и изучения свойств линейных операторов с комплексными элементами спектра целесообразно ввести метрику в линейные пространства над полем комплексных чисел C. Прямой перенос аксиом скалярного произведения, характеризующих евклидовы пространства, на комплексные пространства приводит, как легко обнаружить, к противоречию. Опыт введения скалярного произведения в пространство C^n комплексных строк приводит к следующему определению.

Линейное пространство X над полем комплексых чисел C называется *унитарным пространством*, если наряду с аксиомами I_{1-5} и II_{1-5} линейного пространства выполняются следующие аксиомы.

III_1. Для любой пары элементов a и b из X однозначно определено число (a, b) из C.

III_2. $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для любых a и b из X.

III_3. $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$ для любых a_1, a_2, b из X.

III_4. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$ для любых элементов a и b из X и любого α из C.

III_5. $(a, a) > 0$ для любого, отличного от 0_X, элемента a из X.

Упр.1. Показать, что для произвольных элементов $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots y_n$ унитарного пространства X и любых комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ имеет место формула

$$(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k, \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell y_\ell) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta}_\ell (x_k, y_\ell).$$

Классическим примером унитарного пространства является пространство строк C^n, в котором скалярное произведение строк $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ определяется по формуле

$$(\xi, \eta)_{C^n} = \xi_1 \overline{\eta_1} + \ldots + \xi_n \overline{\eta_n}.$$

Выполнимость аксиом Ш_{1-5} легко проверяется.

Основные метрические понятия: длина, ортогональность, ОНБ, определитель Грама, ортогональное дополнение, ортогональная проекция и другие - непосредственно переносятся на унитарные пространства. Легко убедиться, что основные утверждения, доказанные нами выше для евклидовых пространств, справедливы и для унитарных. В следующих упражнениях мы обратим внимание на особенности некоторых утверждений для унитарных пространств.

Упр.2. Построить такое унитарное пространство и такие два его элемента a и b, что $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$, но a не ортогонален b. Импликация $a \perp b \Longrightarrow |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ справедлива и для унитарного пространства.

Упр.3. Показать, что если ξ и η - столбцы координат элементов x и y конечномерного унитарного пространства относительно некоторой ОНБ, то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k = (\xi, \eta)_{C^n}.$$

Пусть S - матрица из $C^{m \times n}$; через $\overline{S}^T$ обозначим матрицу, полученную из S заменой элементов на комплексно-сопряженные с последующим транспонированием.

Упр.4. Если S - матрица перехода от одной ОНБ конечномерного унитарного пространства X к другой ОНБ, то $\overline{S}^T \cdot S = E$.

Матрицу S из $C^{n \times n}$ называют *унитарной*, если $\overline{S}^T \cdot S = E$. Очевидно, если S - унитарная матрица, то $S \cdot \overline{S}^T = E, |S|^2 = 1$.

Упр.5. Пусть $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - база унитарного (евклидова) пространства, Γ_u - матрица Грама системы u, ξ и η - столбцы координат элементов x и y относительно базы u.

Показать: а) $\overline{\Gamma}_u^T = \Gamma_u$;

б) $(x, y) = \overline{\eta}^T \cdot \Gamma_u \cdot \xi$.

Задачи

1. Элементы x и y унитарного пространства X тогда и только тогда ортогональны, когда для любой пары элементов α и β из поля C

$$|\alpha x + \beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2.$$

2. Пусть M_1 и M_2 - подпространства унитарного пространства X. Тогда:

а) если $M_1 \subseteq M_2$, то $M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$;

б) $(M_1 + M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$;

в) $M_1^\perp + M_2^\perp \subseteq (M_1 \cap M_2)^\perp$, если же M_1 и M_2 конечномерны, то имеет место равенство $M_1^\perp + M_2^\perp = (M_1 \cap M_2)^\perp$.

3. Для любой системы элементов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ унитарного пространства справедливо равенство

$$(\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n))^\perp = x_1^\perp \cap \ldots \cap x_n^\perp.$$

4. Пусть X - конечномерное унитарное пространство, а M_1 и M_2 - такие его подпространства, что $X = M_1 \dot{+} M_2$. Показать, что $X = M_1^\perp \dot{+} M_2^\perp$.

5. Пусть процесс ортогонализации переводит систему элементов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в систему $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Показать справедливость следующих утверждений:

а) $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \Gamma(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, y_1) \cdot \ldots \cdot (y_n, y_n)$;

б) если элементы $y_1, \ldots, y_{k-1}$, $k \le n$ ненулевые, а $y_k = 0$, то система $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ линейно независима и $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \vdash x_k$;

в) элемент y_k является ортогональной проекцией x_k на подпространство

$$L_{k-1} = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_{k-1}),\ k > 1.$$

6. Пусть A - матрица, составленная из координатных строк элементов системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ унитарного пространства X размерности n относительно некоторой ОНБ. Показать, что

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2.$$

7. Найти псевдорешение системы $x = 0,\ y = 0,\ ax + by = ab$.

8. Среди квадратных трехчленов $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ найти ближайший к функции $x = \cos t$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Вычислить меру близости.

9. Найти псевдорешение системы

$$a_1 x = b_1,\ a_2 x = b_2, \ldots, a_n x = b_n;\ \sum_{i=1}^{n} |a_i| \ne 0.$$

Дать задаче геометрическое толкование.

10. Для любых u и v пространства X имеет место равенство

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2).$$

11. Пусть Γ - пространство всех вещественных последовательностей, удовлетворяющих условию Гильберта, H - подпространство из Γ тех последовательностей, в которых лишь конечное число координат $\neq 0$. Показать:

а) Γ относительно скалярного произведения $(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$, $\{\xi,\eta\}\subset\Gamma$ является евклидовым пространством;

б) $H^{\perp}=\{0_\Gamma\}$, $H^{\perp\perp}=\Gamma$ (сравни с теоремами 2 и 3 из §4.4).

ГЛАВА 5
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ УНИТАРНЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

§5.1. Сопряженный оператор

В основе изучения свойств линейных отображений унитарных или евклидовых (слова "или евклидовых" мы будем опускать, хотя понятия и свойства, приведенные в §5.1, имеют место и для евклидовых пространств) пространств лежит понятие оператора, сопряженного с данным. Пусть даны два унитарных пространства X и Y, A - отображение из X в Y. Отображение A^* из Y в X называется *сопряженным с* A, если для любых элементов x из X и y из Y выполняется равенство

$$(Ax, y)_Y = (x, A^* y)_X.$$

Теорема 1. Если для отображения A из X в Y существует с ним сопряженное A^*, то оно однозначно определено и линейно.

Доказательство. Пусть отобржение B из Y в X также сопряжено с A. Поэтому для любых x из X и y из Y $(x, A^* y)_X = (x, By)_X$; отсюда $A^* y = By$ и $A^* = B$. Возьмем теперь произвольные x из X, y_1 и y_2 из Y. Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(x, A^*(y_1 + y_2))_X = (Ax, y_1 + y_2)_Y = (Ax, y_1)_Y + (Ax, y_2)_Y =$$

$$= (x, A^* y_1)_X + (x, A^* y_2)_X = (x, A^* y_1 + A^* y_2)_X.$$

Отсюда $A^*(y_1 + y_2) = A^* y_1 + A^* y_2$. Аналогично показывается, что $A^*(\alpha y) = \alpha(A^* y)$, $\alpha \in C$, $y \in Y$. Теорема 1 доказана.

Если для отображений A и B имеются сопряженные, то легко показать справедливость следующих соотношений:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \ \alpha \in C,$$

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (A^*)^* = A.$$

Теорема 2. Пусть X - конечномерное, Y - произвольное унитарные пространства. Тогда для любого линейного отображения A из X в Y существует, и притом только одно, с ним сопряженное отображение A^*. Если $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - ОНБ пространства X, то для любого y из Y имеет место равенство

$$A^* y = \sum_{k=1}^{n} (y, Au_k) \cdot u_k. \tag{12}$$

Доказательство. Покажем, что отображение $\mathcal{A}^*$, определенное равенством (12), сопряжено с $\mathcal{A}$. Пусть x - произвольный элемент из X и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - строка координат элемента x относительно базы u; тогда $\xi_k = (x, u_k)$, $1 \le k \le n$. Теперь легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(x, \mathcal{A}^* y) = (x, \sum_{k=1}^{n} (y, \mathcal{A} u_k) \cdot u_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{(y, \mathcal{A} u_k)} \cdot (x, u_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{A} u_k, y) \cdot \xi_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{A}(\xi_k u_k), y) = (\mathcal{A} x, y).$$

Однозначность $\mathcal{A}^*$ показана в теореме 1.

Теорема 3. Пусть X и Y - конечномерные пространства, $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - ОНБ пространства X, $v = \{v_1, \ldots, v_m\}$ - ОНБ пространства Y, $\mathcal{A} \in H(X, Y)$. Тогда справедлива импликация

$$\mathcal{A} \overset{u,v}{\longleftrightarrow} A = (\alpha_{ik}) \in C^{m\times n} \Longrightarrow \mathcal{A}^* \overset{v,u}{\longleftrightarrow} \overline{A}^T \in C^{n\times m}.$$

Доказательство. Если $B = (\beta_{ik}) \in C^{n\times m}$ - матрица оператора $\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}^* v_\ell = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j\ell} u_j$, $1 \le \ell \le n$. Следовательно, $(u_k, \mathcal{A}^* v_\ell) = \overline{\beta_{k\ell}}$. Аналогично получим $(\mathcal{A} u_k, v_\ell) = \alpha_{\ell k}$. Поэтому $\beta_{k\ell} = (\mathcal{A}^* v_\ell, u_k) = (v_\ell, \mathcal{A} u_k) = \overline{(\mathcal{A} u_k, v_\ell)} = \overline{\alpha_{\ell_k}}$. Следовательно, $B = \overline{A}^T$. Что и требовалось доказать.

Если $A \in C^{m\times n}$, то матрицу $\overline{A}^T \in C^{n\times m}$ называют *эрмитово сопряженной* с матрицей A и обозначают A^*.

Упр.1. Пусть X и Y - конечномерные унитарные (евклидовы) пространства, $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - база X, $v = \{v_1, \ldots, v_m\}$ - база Y, $\mathcal{A} \in H(X, Y)$. Показать, что справедлива импликация

$$((\mathcal{A} \overset{u,v}{\longleftrightarrow} A) \text{и} (\mathcal{A}^* \overset{v,u}{\longleftrightarrow} B)) \Longrightarrow A^T \cdot \Gamma_v = \Gamma_u \cdot \overline{B}.$$

Упр.2. Пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор унитарного пространства X, обладающий сопряженным. Показать: если M - подпространство из X, инвариантное относительно $\mathcal{A}$, то $M^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

§5.2. Нормальный оператор

Пусть X - унитарное или евклидово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий на X и обладающий сопряженным $\mathcal{A}^*$, называется *нормальным*, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Классическими примерами нормальных операторов являются *самосопряженный* (эрмитов) и *унитарный* операторы, определяемые равенствами

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E} \text{ соответственно.}$$

Теорема 1. Если x - собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением α, то x является собственным вектором $\mathcal{A}^*$ с собственным значением $\overline{\alpha}$.

Доказательство. Так как $\mathcal{A}^*$ перестановочен с $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$, то ядро $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

Теперь для любых x и y из $X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}}$ имеем

$$(\mathcal{A}^*x, y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \alpha y) = (\overline{\alpha}x, y).$$

Таким образом,$((\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\mathcal{E})x, y) = 0$. Так как $(\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\mathcal{E})x \in X_{\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}}$, то $(\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\mathcal{E})x = 0_X$.

Из доказанной теоремы с учетом результата упр.2 предыдущего параграфа имеем

Следствие 1. Если x - собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$, то $x^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Следствие 2. Собственные векторы x и y нормального оператора $\mathcal{A}$, соответствующие различным собственным значениям α и β, ортогональны.

Доказательство. Так как $(\mathcal{A}x, y) = (\alpha x, y)$ и $(x, \mathcal{A}^*y) = (x, \overline{\beta}y)$, то $(\alpha - \beta)(x, y) = 0$. Поэтому $(x, y) = 0$.

Теорема 2(о строении нормального оператора конечномерного унитарного пространства). Для того чтобы линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного *унитарного* пространства X был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы в X существовала ОНБ, все элементы которой являются собственными векторами $\mathcal{A}$.

Доказательство. Необходимость. Для одномерных пространств утверждение теоремы очевидно. Пусть $\dim X = n + 1$ и наше утверждение доказано для нормальных операторов, действующих на унитарных пространствах размерности n. Возьмем какой-либо собственный вектор x оператора $\mathcal{A}$ и ему соответствующее собственное значение $\alpha_1 : \mathcal{A}x_1 = \alpha_1 x_1$. Можно считать, что $|x_1| = 1$. Ортогональное дополнение $x_1^\perp = (\mathcal{L}(x_1))^\perp = X_1$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Поэтому ограничение $\mathcal{A}_1$ оператора $\mathcal{A}$ на X_1 является нормальным оператором. По теореме об ортогональном дополнении $X = \mathcal{L}(x_1) \dotplus X_1$. Следовательно,$\dim X_1 = n$. По индуктивному предположению в X_1 имеется ОНБ $\{x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, состоящая из собственных векторов оператора $\mathcal{A}_1$. Очевидно, $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ - искомая ОНБ.

Достаточность. Пусть $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ - ОНБ пространства X, состоящая из собственных векторов оператора A $Au_k = \alpha_k u_k$, $\alpha_k \in C$, $1 \le k \le n$. Тогда оператору A относительно базы u соответствует матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A_0 A_0^* = A_0^* A_0$. Отсюда следует нужное нам равенство $AA^* = A^*A$.

Естественно матрицу $A \in C^{n \times n}$ называть *нормальной*, если $A \cdot A^* = A^*A$. Фиксируя ОНБ унитарного пространства X, сопоставим нормальной матрице A линейный оператор A, он будет нормальным. Теперь из теоремы 3 легко получается

Следствие. Для любой нормальной матрицы A из $C^{n \times n}$ найдется такая унитарная матрица S, что

$$S^{-1}AS = A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_k \in C,$$

и обратно.

Самосопряженный и унитарный операторы нормальны и поэтому обладают приведенными выше свойствами. Отметим характерные особенности этих операторов.

Лемма. а) Собственные значения самосопряженного оператора *унитарного* пространства X вещественны.

б) Собственные значения унитарного оператора *унитарного или евклидова* пространства по модулю равны 1.

Доказательство. а) Пусть α - собственное значение самосопряженного оператора A, x - ему соответствующий собственный вектор. По теореме 1 имеем $A^*x = \overline{\alpha}x$ и $Ax = A^*x = \alpha x$. Откуда $(\alpha - \overline{\alpha})x = 0_X$ и $\overline{\alpha} = \alpha$, так как $x \neq 0_X$. Аналогично доказывается и второе утверждение.

Из теоремы 1 и леммы вытекает

Теорема 3. Для того чтобы линейный оператор A конечномерного унитарного пространства X был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в X существовала ОНБ из собственных векторов оператора A с вещественными собственными значениями.

Матрицу $A \in C^{n \times n}$ назовем самосопряженной (эрмитовой), если $A^* = A$.

Следствие 1. *Для любой самосопряженной матрицы A найдется такая унитарная матрица S, что*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_k \in R,$$

и обратно.

Следствие 2. Корни характеристического многочлена самосопряженной (в частности, вещественной симметрической) матрицы вещественны.

Из следствия 2 вытекает, что каждый самосопряженный оператор конечномерного *евклидова* пространства обладает собственным вектором. Теперь, следуя доказательству теоремы 2, без особого труда доказывается

Теорема 4. *Для любого самосопряженного оператора A конечномерного евклидова пространства X существует в X ОНБ из собственных векторов оператора A и обратно.*

Следствие. *Для любой вещественной симметрической матрицы найдется такая ортогональная матрица S, что*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_k \in R,$$

и обратно.

Упр.1. Сформулировать и доказать утверждения аналогично теореме 3 и следствиям 1 и 2 для унитарного оператора и унитарной матрицы.

Упр.2. Доказать: линейный оператор A унитарного или евклидова пространства X тогда и только тогда является унитарным, когда для любых x и y из X справедливо равенство

$$(Ax, Ay) = (x, y).$$

Самосопряженный оператор A унитарного (евклидова) пространства X называется *неотрицательным*, если $(Ax, x) \geq 0$ для любого элемента x из X. Если $(Ax, x) > 0$ для любого $x \neq 0_X$, A называется *положительно определенным*.

Теорема 5. Все собственные значения неотрицательного оператора A неотрицательны. Если все собственные значения самосопряженного оператора A конечномерного пространства X неотрицательны, то и A неотрицателен.

Доказательство. Пусть α собственное значение оператора A, x - соответствующий α собственный вектор. Тогда $(Ax, x) = \alpha(x, x)$. Так как $(x, x) \geq 0$, то $\alpha \geq 0$. Пусть теперь $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - ОНБ пространства X из собственных векторов оператора A, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - соответствующие собственные значения. Если $x = \xi_1 u_1 + \ldots \xi_n, u_n$ - произвольный элемент из X, то

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \bar{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\xi_i|^2 \geq 0.$$

Упр.3. Неотрицательный оператор конечномерного пространства тогда и только тогда положительно определен, когда он обратим.

Для анализа уравнений вида $Ax = b$, где A - линейный оператор унитарного (или евклидова) пространства X, $b \in X$, рассмотрим функционал

$$F(x) = (Ax, x) - (x, b) - (b, x) + \gamma, \quad \gamma \in R,$$

называемый *функционалом ошибки* оператора A. Нетрудно вывести полезную для дальнейшего формулу

$$F(x+h) - F(x) = (Ax - b, h) + (h, A^* x - b) + (Ah, h), \ \{x, h\} \subseteq X.$$

Будем говорить, что элемент x_0 из X минимизирует функционал ошибки F, если $F(x_0 + h) - F(x_0) \geq 0$ для любого h из X.

Теорема 6. Пусть A - неотрицательный оператор пространства X. Элемент x_0 минимизирует функционал ошибки F тогда и только тогда, когда $Ax_0 = b$.

Доказательство. Если $Ax_0 = b$, то $F(x_0 + h) - F(x_0) = (Ah, h)$ для любого h из X. Так как $(Ah, h) \geq 0$, то x_0 минимизирует F.

Пусть теперь x_0 минимизирует F, но $a = Ax_0 - b \neq 0_X$. Тогда найдется такое h из X, что $(a, h) \neq 0$. В случае, если X унитарно, $(a, h) = \alpha(h) + i\beta(h), \alpha(h) \in R, \ \beta(h) \in R$.

Поэтому

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = t(2\alpha(h) + t(Ah, h)).$$

Учитывая, что $(a, ih) = \beta(h) - i\alpha(h)$ имеем

$$F(x_0 + tih) - F(x_0) = t(2\beta(h) + t(Ah, h)).$$

Заметим, что $\alpha(-h) = -\alpha(h)$. Следовательно, если $\alpha(h) \neq 0$, можно считать $\alpha(h) < 0$. Тогда из первого равенства следует, что найдется такое t, что $F(x_0 + th) - F(x_0) < 0$. Аналогично рассуждая в случае $\beta(h) < 0$ и учитывая второе равенство, мы приходим к противоречию. Если X евклидово, $\beta(h) = 0, \alpha(h) \neq 0$, что, по существу, уже рассмотрено. Таким образом, $a = Ax_0 - b = 0_X$.

§5.3. Нормальные операторы евклидовых пространств

Для выяснения особенностей нормальных операторов, действующих в евклидовых пространствах, приведем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор конечномерного линейного пространства X над полем вещественных чисел R. Если $X \neq \{0_X\}$, то в X существует ненулевое инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство X_1 размерности 1 или 2. Если $\dim X_1 = 2$, то в X_1 имеется такая база $\{y, z\}$, что

$$\begin{gathered} \mathcal{A}y = \rho y - \sigma z, \\ \mathcal{A}z = \sigma y + \rho z, \end{gathered}$$

где $\rho + i\sigma = \alpha$ - комплексный корень характеристического многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Если характеристический многочлен $\varphi_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень α, то α является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Пусть x - собственный вектор, соответствующий α. Тогда $\mathcal{L}(x)$ - искомое подпространство.

Пусть теперь $\alpha = \rho + i\sigma$ - комплексный корень многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}$. Так как $\varphi_{\mathcal{A}} \in R[\lambda]$, то $\overline{\alpha} = \rho - i\sigma$ является также корнем $\varphi_{\mathcal{A}}$. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ относительно некоторой базы $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ пространства X. Так как $|A - \alpha E| = \varphi_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, то найдется такая ненулевая колонка ξ из C^n, что $(A - \alpha E)\xi = 0_{C^n}$, или $A\xi = \alpha\xi$. В полученном равенстве перейдем к комплексно сопряженным числам. Так как $\overline{A} = A$, то $A\overline{\xi} = \overline{\alpha}\overline{\xi}$. Следовательно, колонки ξ и $\overline{\xi}$ из C^n являются собственными векторами оператора умножения элементов из C^n на матрицу A слева. Собственные значения этого оператора α и $\overline{\alpha}$ различны; поэтому ξ и $\overline{\xi}$ линейно независимы. Рассмотрим вещественные колонки

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi + \overline{\xi}), \quad \zeta = \frac{1}{2i}(\xi - \overline{\xi}).$$

Отсюда $\xi = \eta + i\zeta$, $\overline{\xi} = \eta - i\zeta$ и колонки η и ζ также линейно независимы. Несложный счет приводит к соотношениям

$$A\eta = \rho\eta - \sigma\zeta, \qquad A\zeta = \sigma\eta + \rho\zeta.$$

Для элементов y и z, колонки координат которых η и ζ соответственно, имеем

$$Ay = \rho y - \sigma z, \qquad Az = \sigma y + \rho z.$$

Таким образом, подпространство $X_1 = \mathcal{L}(y, z)$ является искомым. Лемма доказана.

Пусть теперь A - нормальный оператор конечномерного пространства X, α - комплексный корень характеристического многочлена оператора A. Как в доказательстве леммы 1, строим матрицу A оператора A относительно некоторой ОНБ, колонки ξ и $\overline{\xi}$ из C^n, η и ζ из R^n и элементы y и z из X. Так как матрица A нормальна, то оператор умножения элементов из C^n на A слева нормален. Следовательно, ξ и $\overline{\xi}$ ортогональны: $(\xi, \overline{\xi})_{C^n} = 0$ и ортогональные дополнения $\xi^\perp$ и $\overline{\xi}^\perp$ инвариантны относительно оператора умножения элементов из C^n на A слева.

Лемма 2. Элементы y и z ортогональны и имеют одинаковые длины.

Доказательство. Для доказательства ортогональности y и z нетрудно проследить за следующей серией равенств:

$$(y, z)_X = (\eta, \zeta)_{C^n} = \frac{-1}{4i}(\xi + \overline{\xi}, \xi - \overline{\xi})_{C^n} =$$

$$\frac{-1}{4i}((\xi, \xi)_{C^n} - (\xi, \overline{\xi})_{C^n} + (\overline{\xi}, \xi)_{C^n} - (\overline{\xi}, \overline{\xi})_{C^n}) = 0.$$

Точно так же можно подсчитать, что $|y|^2 = \frac{1}{2}(\xi, \xi)_{C^n} = |z|^2$. Лемма 2 доказана.

Упр.1. Показать, что ортогональное дополнение $\mathcal{L}(y, z)^\perp = y^\perp \cap z^\perp$ инвариантно относительно оператора A.

Таким образом, можно считать, что элементы y и z имеют длину, равную 1.

Клеточную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

где $A_1, \ldots, A_s$ - квадратные матрицы, а 0 - нулевые матрицы, называют *клеточно-диагональной* и записывают в виде

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_s.$$

Теорема 1. Для любого нормального оператора A конечномерного евклидова пространства X найдется в X такая ОНБ, относительно которой матрица оператора A имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \rho_1 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \dot{+} \ldots \dot{+} \begin{pmatrix} \rho_m & \sigma_m \\ -\sigma_m & \rho_m \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, - вещественные и $\beta_1 = \rho_1 + i\sigma_1, \ldots, \beta_m = \rho_m + i\sigma_m$ - комплексные корни характеристического многочлена φ_A оператора A. Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Пусть A - нормальный оператор конечномерного евклидова пространства X. Построим такую ОНБ пространства X : $x_1, \ldots, x_k y_1, z_1, \ldots, y_m, z_m$, что

$$Ax_v = \alpha_v x_v;\ 1 \leq v \leq k; Ay_\mu = \rho_\mu y_\mu - \sigma_\mu z_\mu, Az_\mu = \sigma_\mu y_\mu + \rho_\mu z_\mu;\ 1 \leq \mu \leq m,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ - вещественные, $\beta_1 = \rho_1 + i\sigma_1, \ldots, \beta_m = \rho_m + i\sigma_m$ - комплексные корни характеристического многочлена φ_A оператора A. Матрица A оператора A относительно некоторой ОНБ $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ пространства X нормальна. Поэтому оператор $\xi \longrightarrow A\xi, \xi \in C^n$ унитарного пространства C^n является нормальным оператором. По теореме 2 из §.5.2 (о строении нормального оператора конечномерного унитарного пространства) в C^n существует ОНБ из собственных векторов оператора $\xi \longrightarrow A\xi : \xi_1, \ldots \xi_k, \psi_1, \overline{\psi}_1 \ldots, \psi_m, \overline{\psi}_m$ и

$$A\xi_\nu = \alpha_\nu \xi_\nu,\ 1 \leq \nu \leq k;\ A\psi_\mu = \beta_\mu \psi_\mu u, A\overline{\psi}_\mu = \overline{\beta}_\mu \overline{\psi}_\mu,\ 1 \leq \mu \leq m.$$

Положим $\eta_\mu = \frac{1}{2}(\psi_\mu + \overline{\psi}_\mu), \zeta_\mu = \frac{1}{2i}(\psi_\mu - \overline{\psi}_\mu)$. Тогда$(\eta_\mu, \zeta_\mu) = 0$ и $(\eta_\mu, \eta_\mu) = (\zeta_\mu, \zeta_\mu)$ (см. доказательство леммы 2). Следовательно, система $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1\zeta_1, \ldots, \eta_m, \zeta_m$ является ортогональной базой пространства C^n, все элементы которой принадлежат R^n. Поэтому построенная система является ортогональной базой и R^n, причем

$$A\xi_\nu = \alpha_\nu \xi_\nu; \begin{cases} A\eta_\mu = \rho_\mu \eta_\mu - \sigma_\mu \zeta_\mu, \\ A\zeta_\mu = \sigma_\mu \eta_\mu + \rho_\mu \zeta_\mu. \end{cases}$$

Вернемся к пространству X и построим элементы $x_\nu = u \cdot \xi_\nu$, $y_\mu = u \cdot \eta_\mu$, $z_\mu = u \cdot \zeta_\mu$. По лемме 2 y_μ и z_μ имеют одинаковые длины, поэтому можно считать, что $|y_\mu| = |z_\mu| = 1$. А тогда система

$$\{x_1, \ldots, x_k, y_1, z_1, \ldots, y_m, z_m\}$$

будет искомой ОНБ пространства X. Обратное утверждение вытекает из легко проверяемого равенства $A_0 A_0^T = A_0^T A_0$.

Следствие. Для любой нормальной матрицы A из $R^{n\times n}$ найдется такая ортогональная матрица S, что

$$S^{-1}AS = A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \rho_1 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \dot{+} \ldots \dot{+} \begin{pmatrix} \rho_m & \sigma_m \\ -\sigma_m & \rho_m \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ - вещественные и $\rho_1 + i\sigma_1, \ldots, \rho_m + i\sigma_m$ - комплексные корни характеристического многочлена φ_A матрицы A. Верно и обратное утверждение.

Отметим характерные особенности самосопряженного и унитарного операторов евклидова конечномерного пространства. В предыдущем параграфе показано, что корни характеристического многочлена вещественной симметрической матрицы вещественны. Поэтому из доказанной теоремы вытекает приведенная в §5.2 теорема 4 о строении самосопряженного оператора конечномерного евклидова пространства и ее матричное следствие.

Из результатов предыдущего параграфа-леммы (утверждение б) и упр.1 - следует, что корни характеристического многочлена φ_A ортогональной матрицы A по модулю равны 1. Следовательно, вещественные корни φ_A будут равны 1 или -1, а комплексные корни могут быть записаны в виде $\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\sin\varphi \neq 0$. Нетрудно убедиться, что справедлива следующая

Теорема 2. Для того чтобы линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства X был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы в X существовала ОНБ, относительно которой матрица оператора $\mathcal{A}$ имела вид

$$A_0 = E_s \dot{+} (-E_t) \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \dot{+} \ldots \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{pmatrix},$$

где E_s и E_t - единичные матрицы порядков s и t соответственно, $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_m + i\sin\varphi_m$ - комплексные корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.

Упр.1. Сформулировать и доказать матричное следствие к теореме 2 об ортогональной матрице.

Линейный оператор A унитарного или евклидова пространства X называется *кососимметрическим*, если он обладает сопряженным и $A^* = -A$. Матрица A из $C^{n\times n}$ (или из $R^{n\times n}$) называется эрмитово кососимметрической (соответственно кососимметрической), если $\overline{A}^T = -A$. Как и выше, легко показать, что каждое собственное значение кососимметрического оператора унитарного пространства либо равно нулю, либо является чисто мнимым числом; такими же будут и корни характеристического многочлена (эрмитово) кососимметрической матрицы.

Упр.2. Сформулировать и доказать теоремы о строении кососимметрического оператора унитарного и евклидова пространств и соответствующие матричные следствия.

§5.4. Псевдорешения и псевдообращения

Здесь мы изложим в геометрической форме теорию псевдорешений и связанную с ней теорию псевдообращений операторов. Пусть X и Y - унитарные (или евклидовы) пространства, A - линейное отображение из X в Y, обладающее сопряженным A^*.

Лемма 1. $(AX)^{\perp} = Y_{A^*}$, $X_A = X_{A^*A}$.

Доказательство. Первое равенство следует из справедливости импликаций

$$y \in (AX)^{\perp} \iff \{\forall x \in X, 0 = (Ax, y) = (x, A^*y)\} \iff A^*y = 0_X.$$

Включение $X_A \subseteq X_{A^*A}$ очевидно. Пусть $x \in X_{A^*A}$. Следовательно, $Ax \in Y_{A^*} = (Ax)^{\perp}$. Поэтому $Ax = 0_Y$.

Упр.1. $(A^*Y)^{\perp} = X_A$, $Y_{A^*} = Y_{AA^*}$.

Уравнение $Ax = b$, $b \in Y$ имеет решение тогда и только тогда, когда $b \in AX$. Если уравнение $Ax = b$ решений не имеет, то разумно в X найти такой элемент x_0, чтобы Ax_0 был возможно ближе к b. В связи с этим рассмотрим функционал $\Phi_0(x) = |Ax - b|^2$, называемый *функционалом невязки*. Элемент x_0 из X, минимизирующий функционал невязки, называют *псевдорешением* уравнения $Ax = b$, Легко убедиться, что

$$\Phi_0(x) = (A^*Ax, x) - (x, A^*b) - (A^*b, x) + (b, b).$$

Таким образом, функционал невязки является функционалом ошибки для неотрицательного оператора A^*A элемента A^*b и скаляра $\gamma = (b, b)$. Теперь из теоремы 6 §5.3 следует

Лемма 2. Для того чтобы элемент x_0 из X минимизировал функционал невязки, необходимо и достаточно, чтобы $A^*Ax_0 = A^*b$.

Уравнение $A^*Ax = A^*b$ называют *нормальным* уравнением для уравнения $Ax = b$. Через N_b обозначим совокупность всех псевдорешений уравнения $Ax = b$:

$$N_b = \{x, x \in X; A^*Ax = A^*b\}.$$

Теорема 1. Если пространство X конечномерно, то для любого b из Y уравнение $Ax = b$ обладает псевдорешением. Более того, в N_b существует единственный x_0 с минимальной нормой, притом $N_b \cap X_A^\perp = \{x_0\}$.

Доказательство. Пусть b_M ортогональная проекция b на конечномерное подпространство $M = AX$ и x_0 такой элемент из X, что $b_M = Ax_0$. По теореме об ортогональном дополнении $|Ax_0 - b| \le |Ax - b|$ для любого x из X. Таким образом, построенный x_0 минимизирует функционал Φ_0.

Так как $X = X_A \dot{+} X_A^\perp$, то для любого x из N_b найдутся такие $x_1 \in X_A$ и x_0 из $X_A^\perp$, что $x = x_1 + x_0$. Отсюда $|x| \ge |x_0|$ и $A^*Ax = A^*Ax_0$. Поэтому $x_0 \in N_b \cap X_A^\perp$. Если $y_0 \in N_b \cap X_A^\perp$, то $A^*A(x_0 - y_0) = A^*b - A^*b = 0_X$. По лемме $x_0 - y_0 \in X_A$. Но $X_A \cap X_A^\perp = \{0_X\}$, следовательно, $y_0 = x_0$. Теорема 1 доказана.

Псевдорешение x_0 с минимальной нормой называют *нормальным* псевдорешением уравнения $Ax = b$. Когда пространство X конечномерно, доказанная теорема дает возможность указать способ вычисления нормального псевдорешения уравнения $Ax = b$. Так как $X_A^\perp = (A^*Y)^{\perp\perp} = A^*Y$, то $\{x_0\} = N_b \cap A^*Y$. Поэтому в Y найдется такой элемент y_0, что $x_0 = A^*y_0$. Отсюда $A^*AA^*y_0 = A^*b$. Следовательно, для построения нормального псевдорешения x_0 необходимо найти какое-либо решение y_0 уравнения $A^*AA^*y = A^*b$ и вычислить $x_o = A^*y_0$.

Отметим два случая, часто встречающихся на практике.

1. Ранг r_A отображения A равен размерности X : $r_A = \dim AX = \dim X$. Отсюда дефект $d_A = 0$ и $X_{A^*A} = X_A = \{0_X\}$. Поэтому оператор A^*A обратим на X и из нормального уравнения имеем единственное псевдорешение $x_0 = (A^*A)^{-1}A^*b$.

2. Ранг r_A отображения A равен размерности Y : $r_A = \dim Y$. (Здесь предполагается конечномерность пространства Y.) В этом случае $AX = Y$ и $Y_{AA^*} = Y_{A^*} = (AX)^\perp = \{0_Y\}$. Поэтому оператор AA^* обратим на Y. Из равенства $A^*AA^*y_0 = A^*b$ имеем $(AA^*)(AA^*)y_0 = AA^*b$. Отсюда $y_0 = (AA^*)^{-1}b$ и $x_0 = A^*(AA^*)^{-1}b$. Из обратимости AA^* легко следует равносильность нормального уравнения $AA^*x = A^*b$ и

исходного $Ax = b$. Предложенный алгоритм среди всех решений уравнения $Ax = b$ выбирает то, которое имеет наименьшую норму.

Для необратимого отображения аналогом обратного может служить отображение, сопоставляющее элементу y из Y нормальное псевдорешение уравнения $Ax = y$. Приступая к построению этого отображения, предполагаем конечномерность пространства X.

Лемма 3. Пусть A_1 - ограничение отображения $A \in H(X,Y)$ на $X_A^{\perp}$. Тогда A_1 есть биекция $X_A^{\perp}$ на AX.

Доказательство. Так как $AX = A(X_A \dot{+} X_A^{\perp}) = A_1 X_A^{\perp}$, то A_1 отображает $X_A^{\perp}$ на AX. Пусть для x' и x'' из $X_A^{\perp}$ имеется равенство $Ax' = Ax''$. Отсюда $x' - x'' \in X_A^{\perp} \cap X_A$, таким образом, $x' - x'' = 0_X$.

Обозначим через π ортопроектор Y на AX, через $\mathcal{I}$ - тождественное вложение $X_A^{\perp}$ в X и положим

$$A^+ = \mathcal{I} A_1^{-1} \pi.$$

Очевидно, A^+ - линейное отображение Y в X, причем

$$A^+ Y = X_A^{\perp},\ Y_{A^+} = (AX)^{\perp} = Y_{A^*}.$$

Теорема 2. Для любого y из Y элемент $x_0 = A^+ y$ является нормальным псевдорешением уравнения $Ax = y$.

Доказательство. По построению $x_0 \in X_A^{\perp}$. Покажем, что $x_0 \in N_b$. Так как $Ax_0 = A_1 x_0 = A_1(\mathcal{I} A_1^{-1} \pi) y = \pi y$, то $A^* A x_0 = A^* \pi y$. Но $y - \pi y \in (AX)^{\perp} = Y_{A^*}$. Поэтому $A^* \pi y = A^* y$. Следовательно, $x_0 \in N_b \cap X_A^{\perp}$.

Построенное отображение $A^+ : Y \longrightarrow X$ называется *псевдообратным* к отображению A.

Теорема 3. Псевдообратное отображение A^+ к отображению A и только оно удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} (AA^+)^* = AA^+,\ AA^+A = A \\ (A^+A)^* = A^+A,\ A^+AA^+ = A^+ \end{array}\right\} \text{(соотношения Пенроуза).}$$

Доказательство. Для любого y из Y имеем $AA^+ y = A(\mathcal{I} A_1^{-1} \pi) y = \pi y$. Таким образом, $AA^+ = \pi$-ортопроектор Y на AX. Следовательно, $\pi^* = \pi$. Далее для x из X имеем $A^+ A x = (\mathcal{I} A_1^{-1} \pi) A x = A_1^{-1} A x$. Так как $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in X_A$, $x_0 \in X_A^{\perp}$, то $A_1^{-1} A x = A_1^{-1} A x_0 = x_0$. Следовательно, $A^+ A = \mathcal{R}$ есть ортопроектор X на $X_A^{\perp}$. Поэтому $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. Другие соотношения следуют из равенств

$$AA^+ A x = \pi A x = A x \quad \text{и} \quad A^+ A A^+ y = \mathcal{R} A^+ y = A^+ y$$

для любых x из X и y из Y.

Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - линейные отображения из Y в X - обладают сопряженными и удовлетворяют соотношениям Пенроуза. Покажем, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Положим $\mathcal{D} = \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$, тогда $\mathcal{ADA} = 0$, $(\mathcal{DA})^* = \mathcal{DA}$ и $(\mathcal{AD})^* = \mathcal{AD}$. Отсюда следует $(\mathcal{DA})^*\mathcal{DA} = (\mathcal{AD})^*\mathcal{AD} = 0$. Следовательно, $\mathcal{DA} = \mathcal{AD} = 0$ и $\mathcal{B}_1\mathcal{A} = \mathcal{B}_2\mathcal{A}$, $\mathcal{AB}_1 = \mathcal{AB}_2$. Теперь соотношения

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1\mathcal{AB}_1 = \mathcal{B}_2\mathcal{AB}_2 = \mathcal{B}_2$$

завершают доказательство теоремы 3.

Упр.2. Показать, что $N_b = \mathcal{A}^+b + (\mathcal{E} - \mathcal{A}^+\mathcal{A})X$.

Упр.3. Показать, что:

а) если $r_{\mathcal{A}} = \dim X$, то $\mathcal{A}^+ = (\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^*$;

б) если Y - конечномерно и $r_{\mathcal{A}} = \dim Y$, то $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^*(\mathcal{AA}^*)^{-1}$.

Упр.4. Пусть для линейного отображения $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ найдутся такие пространство Z, отображения $\mathcal{B} : X \to Z, \mathcal{C} : Z \to Y$, обладающие сопряженными, что $\mathcal{A} = \mathcal{CB}$, а операторы $\mathcal{C}^*\mathcal{C}$ и $\mathcal{BB}^*$ обратимы на Z. Тогда

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{B}^*(\mathcal{BB}^*)^{-1} \cdot (\mathcal{C}^*\mathcal{C})^{-1}\mathcal{C}^*.$$

Между линейными отображениями конечномерных пространств и матрицами имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции и произведения. Поэтому понятие псевдообратного отображения может быть перенесено на матрицы. Проиллюстрируем это соответствие, специальным образом выбирая базы. Пусть X и Y - конечномерные унитарные или евклидовы пространства; $\dim X = n$, $\dim Y = m$; $\mathcal{A}$ - линейное отображение из X в Y ранга r. Ортонормированную базу $\overline{u} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ подпространства $X_{\mathcal{A}}^{\perp}$ дополним до базы u пространства X базой ядра $X_{\mathcal{A}}$ и ортонормированную базу $\overline{v} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ подпространства $\mathcal{A}X$ дополним до базы v пространства Y базой $(\mathcal{A}X)^{\perp}$. Так как ограничение $\mathcal{A}_1$ отображения $\mathcal{A}$ на $X_{\mathcal{A}}^{\perp}$ есть биекция $X_{\mathcal{A}}^{\perp}$ на $\mathcal{A}X$, то матрица A_1 отображения $\mathcal{A}_1$ относительно баз $\overline{u}$ и $\overline{v}$ обратима. Теперь, учитывая действие отображения $\mathcal{A}$ на элементы базы u и действие $\mathcal{A}^+$ на элементы базы v, мы можем записать им соответствующие матрицы

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{u,v} A = \begin{pmatrix} A_1 & O_{r\ n-r} \\ O_{m-r\ ,r} & O_{m-r\ n-r} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^+ \xleftrightarrow{v,u} A^+ = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O_{r\ m-r} \\ O_{n-r\ ,r} & O_{n-r\ m-r} \end{pmatrix}.$$

В заключение сформулируем матричные аналоги утверждений, полученных выше для псевдообратного отображения:

А. Для любой матрицы A псевдообратная матрица A^+ и только она удовлетворяет соотношениям Пенроуза.

Б. Пусть A - числовая матрица размеров $m\times n$. Тогда если $r(A)=n$, то $A^+=(A^*A)^{-1}A^*$, если $r(A)=m$, то $A^+=A^*(AA^*)^{-1}$ и, наконец, если $A=CB$ - скелетное разложение матрицы A, то $A^+=B^+C^+$.

В. Для столбца b столбец $x_0=A^+b$ является нормальным псевдорешением уравнения $Ax=b$, т.е. решением нормальной системы $A^*Ax=A^*b$ с наименьшей нормой.

Для построения ортонормированных баз пространств X и Y, относительно которых матрицы отображений A и A^+ имеют наиболее простой вид, существенную роль играют операторы A^*A и AA^*, определенные соответственно в X и Y. Они самосопряжены, более того, они неотрицательны, так как для любых x из X и y из Y

$$(A^*Ax,x)=(Ax,Ax)\geq 0, (AA^*y,y)=(A^*y,A^*y)\geq 0.$$

Предположим, что X конечномерно и $\dim X=n$. Тогда для оператора A^*A в X имеется ортонормированный базис $\{x_1,\dots,x_n\}$ из собственных векторов, причем соответствующие собственные значения могут быть записаны в виде

$$\rho_1^2,\dots,\rho_n^2,\ \rho_k\geq 0;\ A^*Ax_k=\rho_k^2x_k,\ 1\leq k\leq n.$$

Лемма 4.

а) Система элементов $\{Ax_1,\dots,Ax_n\}$ ортогональна;

б) если $Ax_k\neq 0_Y$, то Ax_k - собственный вектор оператора AA^* с собственным значением ρ_k^2; в) $Ax_k\neq 0_Y$ тогда и только тогда, когда $\rho_k\neq 0$.

Доказательство. Так как $(Ax_k,Ax_\ell)=(A^*Ax_kx_\ell)=\rho_k^2(x_k,x_\ell)$, то $(Ax_k,Ax_\ell)=0$, если $k\neq\ell$ и для всех k $|Ax_k|=\rho_k$. Утверждения "а" и "в" доказаны. Теперь равенства

$$AA^*(Ax_k)=A(A^*Ax_k)=A(\rho_k^2x_k)=\rho_k^2\cdot Ax_k$$

доказывают справедливость "б".

Так как $AX=\mathcal{L}(Ax_1,\dots,Ax_n)$, то число отличных от нуля среди $Ax_1,\dots,Ax_n$ равно рангу r отображения A. Можно считать, что $\rho_1^2\geq\rho_2^2\geq\dots\geq\rho_r^2>0, \rho_{r+1}=0,\dots,\rho_n=0$.

Следовательно, система $\{x_1,\dots,x_r\}$ является ОНБ $X_A^\perp$, а $\{x_{r+1},\dots,x_n\}$ - ОНБ ядра X_A. Базис $\{x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n\}$ пространства X называют первым *сингулярным базисом*, числа $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_r$ - *сингулярными числами* или *главными значениями* отображения A.

Для более точного описания действия отображений A, A^*, A^+ положим $y_k = \rho_k^{-1} A x_k$, $1 \le k \le r$. Очевидно, $\{y_1, \ldots, y_r\}$ - ОНБ области значений AX отображения A. Отсюда имеем

$$Ax_k = \rho_k y_k,\ 1 \le k \le r;\ Ax_k = 0_Y,\ r < k \le n.$$

Действуя отображением A^* на Ax_k при $1 \le k \le r$ и учитывая, что $A^* A x_k = \rho_k^2 x_k$ и $(AX)^\perp = Y_{A^*}$, имеем

$$A^* y_k = \rho_k x_k,\ 1 \le k \le r;\ A^* y = 0_X,\ y \in (AX)^\perp.$$

Из определения псевдообратного отображения следует, что $A^+ y = A_1^{-1} y$, если $y \in AX$, и $A^+ y = 0_X$, если $y \in (AX)^\perp$, где A_1 - ограничение A на $X_A^\perp$. Следовательно,

$$A^+ y_k = \rho_k^{-1} x_k,\ 1 \le k \le r;\ A^+ y = 0,\ y \in (AX)^\perp.$$

Построим теперь нормальное псевдорешение x_0 уравнения $Ax = b$. Пусть $b = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_r y_r + \overline{y}$, где $\overline{y} \in (AX)^\perp = Y_{A^*} = Y_{A^+}$. Тогда

$$x_0 = A^+ b = \beta_1 A^+ y_1 + \ldots + \beta_r A^+ y_r + A^+ \overline{y} = \beta_1 \rho_1^{-1} x_1 + \ldots + \beta_r \rho_r^{-1} x_r.$$

Таким образом, доказана теорема о координатах нормального псевдорешения относительно сингулярного базиса.

Теорема 4. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ - первый сингулярный базис, $\rho_1, \ldots, \rho_r$ - сингулярные числа отображения A, $\pi b = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_r y_r$ - проекция элемента b на AX, тогда нормальное псевдорешение x_0 уравнения $Ax = b$ имеет вид

$$x_0 = \frac{\beta_1}{\rho_1} x_1 + \ldots + \frac{\beta_r}{\rho_r} x_r.$$

В случае когда и Y конечномерно, дополним базу $\{y_1, \ldots, y_r\}$ области значений AX ортогонормированной базой $\{y_{r+1}, \ldots, y_m\}$ подпространства $(AX)^\perp$. Полученную базу $\{y_1, \ldots, y_2, y_{r+1}, \ldots, y_m\}$ пространства Y называют *вторым сингулярным* базисом отображения A. Имея в виду записанные выше соотношения для Ax_k и $A^+ y_k$, нетрудно получить матрицы отображений A и A^+ относительно сингулярных базисов.

Теорема 5. Относительно сингулярных базисов отображения A и A^+ имеют соответственно матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^+$:

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \rho_1 \ldots 0 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ \ldots \rho_r \end{matrix} & 0_{r\ n-r} \\ 0_{m-r\ r} & 0_{m-r\ n-r} \end{array} \right), \mathcal{D}^+ = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \rho_1^{-1} \ldots \ 0 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ \ldots \rho_r^{-1} \end{matrix} & 0_{r\ m-r} \\ 0_{n-r\ r} & 0_{n-r\ m-r} \end{array} \right),$$

где $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ - сингулярные числа отображения $\mathcal{A}$.

Полученный результат перенесем на матричный язык.

Следствие. Для любой матрицы A из $C^{m\times n}$ (из $R^{m\times n}$) найдутся такие унитарные (ортогональные) матрицы S и T, что $T^*AS = \mathcal{D}$ - матрица вида, описанного в теореме 5.

Доказательство. Пусть X и Y-унитарные (евклидовы) пространства размерностей соответственно n и m. Фиксируем какие-либо ОНБ u и v этих пространств и сопоставим матрице A линейное отображение $\mathcal{A}$ из X в Y. Построим матрицы S и T перехода от исходных баз u и v к сингулярным соответственно к первой и второй базам. Тогда $T\mathcal{D} = AS$ или $A = T\mathcal{D}S^*$.

Представление матрицы A в виде $A = T\mathcal{D}S^*$ называют *сингулярным разложением* матрицы A. Столбцы матриц S и T по построению являются координатными столбцами элементов соответственно первого и второго сингулярных базисов отображения $\mathcal{A}$.

Упр.5. Показать, что $A^+ = S\mathcal{D}^+T^*$.

Вычисления нормального псевдорешения и псевдообратного отображения не обладают устойчивостью по отношению к исходной информации: малые возмущения в исходных данных $\mathcal{A}$ и b часто приводят к большим возмущениям в нормальном псевдорешении. Метод регуляризации позволяет определить нормальное псевдорешение устойчивым способом. Пусть $\mathcal{A}$ - отображение пространства X в пространство Y, $b \in Y, x \in X$. Дополним функционал невязки Φ_0 неотрицательным слагаемым $\alpha^2|x|^2, \alpha > 0$. Полученный функционал

$$\Phi_\alpha(x) = |\mathcal{A}x - b|^2 + \alpha^2|x|^2$$

называют *регуляризующим* функционалом. Легко проверить, что

$$\Phi_\alpha(x) = ((\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E})x, x) - (x, \mathcal{A}^*b) - (\mathcal{A}^*b, x) + (b, b).$$

Следовательно, регуляризующий функционал является функционалом ошибки для положительно определенного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E}$ элемента $\mathcal{A}^*b$ и скаляра (b, b). Из теоремы 6 §5.2 непосредственно следует

Лемма 5. Для того чтобы элемент x_α из X минимизировал регуляризующий функционал, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E})x_\alpha = \mathcal{A}^*b.$$

Предположим теперь, что X конечномерно. Положительно определенный оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E}$ обратим на X. Следовательно, $x_\alpha =$

$(A^*A+\alpha^2 E)^{-1}A^*b$ - однозначно определенный элемент из X, минимизирующий функционал Φ_α. Для оценки близости x_α к нормальному псевдорешению x_0 уравнения $Ax = b$ найдем представление x_α относительно первого сингулярного базиса. Пусть $x_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$ и $b = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_r y_r + \overline{y}, \overline{y} \in Y_{A^*} = (AX)^\perp$. Тогда

$$(A^*A+\alpha^2 E)x_\alpha = \sum_{k=1}^{r}(\xi_k \rho_k^2 + \alpha^2 \xi_k) + \sum_{\ell=r+1}^{n} \xi_\ell \alpha^2 x_\ell,$$

$$A^*b = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \rho_k x_k.$$

Учитывая результат леммы 2, получим равенства

$$\xi_k(\rho_k^2+\alpha^2) = \beta_k \rho_k,\ 1 \le k \le r;\ \xi_\ell = 0,\ r < \ell \le n.$$

Следовательно,

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k \beta_k}{\rho_k^2+\alpha^2} \cdot x_k.$$

Представление x_0 относительно первого сингулярного базиса приведено в теореме 5. Поэтому

$$x_0 - x_\alpha = \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\beta_k}{\rho_k} - \frac{\rho_k\beta_k}{\rho_k^2+\alpha^2}\right)x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k \alpha^2}{\rho_k(\rho_k^2+\alpha^2)} \cdot x_k.$$

Отсюда

$$|x_0 - x_\alpha|^2 = \alpha^4 \sum_{k=1}^{r} \frac{|\beta_k|^2}{\rho_k^2(\rho_k^2+\alpha^2)^2} \le \alpha^4\gamma^2,\ \text{где}\ \gamma^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{|\beta_k|^2}{\rho_k^6}.$$

Теорема 6. Нормальное псевдорешение x_0 уравнения $Ax = b$ и решение x_α уравнения $(A^*A+\alpha^2 r)x = A^*b$, связаны соотношением $|x_0 - x_\alpha| \le \alpha^2\gamma$, где $\gamma^2 = \sum_{k=1}^{r} |\beta_k|^2 \rho_k^{-6}$.

Таким образом, если исходная информация задана точно и точно выполнено вычисление x_α, то при $\alpha \longrightarrow 0$ x_α стремится к нормальному псевдорешению x_0 уравнения $Ax = b$.

Задачи

1. Рассмотрим совокупность X всех бесконечных и вещественных последовательностей, у которых почти все элементы равны нулю: $X = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots), \xi_k \in R\}$.

Определим сумму двух последовательностей, умножение последовательностей на скаляр естественным образом и скалярное произведение по формуле $(\xi, \eta) = \sum_k \xi_k \eta_k$. Очевидно, X становится евклидовым пространством. Показать, что оператор A, определенный формулой $A\xi = (\sum_k \xi_k, 0 \ldots 0, \ldots)$, линеен и не имеет сопряженного.

2. Пусть M_1 и M_2 - такие подпространства конечномерного пространства X, что $X = M_1 \dot{+} M_2$ и A - проектор X на M_1 параллельно M_2. Показать, что $X = M_1^{\perp} \dot{+} M_2^{\perp}$ и A^* - проектор X на $M_2^{\perp}$ параллельно $M_1^{\perp}$.

3. Пусть A - линейный оператор унитарного (евклидова) пространства X. Показать, что A нормален тогда и только тогда, когда для любого x из X $|A^*x| = |Ax|$.

4. Пусть A - нормальный оператор унитарного пространства X. Показать, что если M - конечномерное инвариантное относительно A подпространство из X, то $M^{\perp}$ также инвариантно относительно A.

5. Пусть A - нормальный оператор конечномерного унитарного пространства X. Показать, что $(AX)^{\perp} = X_A$.

6. Если $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ - две ортонормированные системы элементов n-мерного унитарного пространства X, то существует унитарный оператор, переводящий первую систему во вторую.

7. Пусть A - линейный оператор конечномерного унитарного пространства X. Показать, что если для любой пары элементов x и y из X справедлива импликация $x \perp y \Longrightarrow Ax \perp Ay$, то найдутся такие скаляр α из C и унитарный оператор B, что $A = \alpha B$.

8. Пусть A и B - самосопряженные операторы унитарного пространства X. Если для любого элемента x из X $(Ax, x) = (Bx, x)$, то $A = B$.

9. Для данной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти такую ортогональную матрицу S, что матрица $S^{-1}AS$ – будет диагональна.

10. Показать, что линейный оператор π пространства X тогда и только тогда является ортопроектором, когда $\pi^2 = \pi$ и $\pi^* = \pi$. При этом $X = \pi X \dot{+} X_\pi$, $X_\pi^{\perp} = \pi X$ и $(\pi X)^{\perp} = X_\pi$.

11. Пусть A - неотрицательный оператор пространства X, тогда для любого положительного числа α оператор $A + \alpha E$ положительно определен.

11. Пусть A - неотрицательный оператор пространства X, тогда для любого положительного числа α оператор $A+\alpha\mathcal{E}$ положительно определен.

12. Пусть $\{u_1,\dots,u_n\}$ - ОНБ пространства X из собственных векторов оператора A^*A; $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ - соответствующие собственные значения, причем $\sigma_1\neq 0,\dots,\sigma_r\neq 0,\sigma_{r+1}=0,\dots,\sigma_n=0$. Показать, что $x_0=\sum_{i=1}^n \xi_i u_i$ будет тогда и только тогда нормальным псевдорешением уравнения $Ax=b$, когда $\xi_{r+1}=0,\dots,\xi_n=0$ и $\xi_i=\sigma_i^{-1}(b,Au_i)$, $1\leq i\leq r$.

13. Пусть $\{v_1,\dots,v_m\}$ - ОНБ пространства Y из собственных векторов оператора AA^*; $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ - соответствующие собственные значения, причем $\sigma_1\neq 0,\dots,\sigma_r\neq 0,\sigma_{r+1}=0,\dots,\sigma_m=0$. Показать, что x_0 из X будет тогда и только тогда нормальным псевдорешением уравнения $Ax=b$, когда $x_0=\xi_1A^*v_1+\ldots+\xi_rA^*v_r$, где $\xi_i=\sigma_i^{-1}\cdot(b,v_i)$, $1\leq i\leq r$.

14. Пусть A - нормальный оператор конечномерного унитарного пространства X, $\{u_1,\dots u_n\}$ - ОНБ из собственных векторов A, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - соответствующие собственные значения A, причем $\lambda_1\neq 0,\dots,\lambda_r\neq 0,\lambda_{r+1}=0,\dots,\lambda_n=0$ и $b=\beta_1u_1+\ldots\beta_nu_n$. Показать, что $x_0=\frac{\beta_1}{\lambda_1}u_1+\ldots+\frac{\beta_r}{\lambda_r}u_r$ будет нормальным псевдорешением уравнения $Ax=b$.

15. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ - унитарные операторы конечномерных пространств X и Y; $A\in H(X,Y), B=\mathcal{V}A\mathcal{U}$.

Показать:

а) если x_0 - нормальное псевдорешение уравнения $Ax=b$, то $x_1=\mathcal{U}^*x_0$ - нормальное псевдорешение уравнения $Bx=\mathcal{V}b$;

б) $B^+=\mathcal{U}^*A^+\mathcal{V}^*$.

16. Для любой матрицы $A\in C^{m\times n}$ показать справедливость соотношений

$$(A^+)^*=(A^*)^+,(A^+)^+=A,(AA^+)^2=AA^+,(A^+A)^2=A^+A.$$

17. Пусть $C=\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Показать, что $(C\cdot B)^+\neq B^+C^+$.

18. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-1&0&-1&1\\1&1&0&2\end{pmatrix}$.

Найти:

а) скелетное разложение и вычислить матрицу A^+;

б) нормальное псевдорешение системы $Ax=b$, где $b=(1,2,1)^T$.

19. Найти сингулярные числа матрицы A и сингулярные разложе-

ния A и A^+, если

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 1111 \end{pmatrix};\ б)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

20. Показать, что сингулярные числа нормального оператора равны модулям собственных значений этого оператора.

21. Пользуясь регуляризованным нормальным уравнением (см.лемму 5) найти нормальное псевдорешение системы

$$x_1 + 2x_2 = 4, \quad x_1 + 2x_2 = 6.$$

22. Среди решений системы $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ найти то, которое имеет наименьшую длину.

23. Пусть x_1 и x_2 - нормальные псевдорешения соответственно уравнений $\mathcal{A}x = b_1$ и $\mathcal{A}x = b_2$. Показать, что нормальное псевдорешение уравнения $(\alpha\mathcal{A})x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, $\alpha \neq 0$ будет $x_0 = \alpha^{-1}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$.

24. Пусть x_0 и y_0 - нормальные псевдорешения соответственно уравнений $\mathcal{A}x = b$ и $\mathcal{A}^* y = a$. Показать, что

$$(x_0, a)_X = (b, y_0)_Y.$$

25. Установить справедливость равенства

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E})(\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \beta^2\mathcal{E})(x_\alpha - x_\beta) = (\alpha^2 - \beta^2)\mathcal{A}^* b.$$

ГЛАВА 6
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§6.1. Определение и сопутствующие понятия

Квадратичная форма - нелинейный объект. Однако он тесно связан с такими линейными объектами, как матрица, линейная замена переменных и др. Поэтому линейные методы при изучении свойств квадратичных форм оказались весьма полезными, а порой и определяющими.

Однородный многочлен $f(x)$ второй степени от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из некоторого поля F называется *квадратичной формой* над F от $x_1, \ldots, x_n$. Квадратную форму можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \; a_{ik} = a_{ki} \in F, \; x = (x_1, \ldots, x_n)^T.$$

Симметричная матрица $A = (a_{ik})$ из $F^{n \times n}$ называется *матрицей формы* $f(x)$, а ее определитель $|A|$ - дискриминантом $f(x)$.

Переход от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к новым переменным $y_1, \ldots, y_n$ называется линейным, если

$$x_i = \sigma_{i1} y_1 + \sigma_{i2} y_2 + \ldots + \sigma_{in} y_n, \; 1 \le i \le n,$$

или $x = S \cdot y$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ - колонки соответствующих переменных, $S = (\sigma_{ik}) \in F^{n \times n}$. Матрица S называется *матрицей перехода* от переменных x к переменным y. Если T матрица перехода от переменных y к переменным z, т.е. $y = T \cdot z$, то $S \cdot T$ будет матрицей перехода от x к z. Если $|S| \ne 0$, то переход от x к y называется *неособенным* (неособенной заменой переменных x переменными y). Одной из основных задач теории квадратичных форм является задача о нахождении простейших видов, к которым могут быть приведены формы путем неособенной замены переменных.

С каждой квадратичной формой $f(x)$ связаны n линейных форм

$$f_i(x) = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n, \; 1 \le i \le n.$$

Легко убедиться в справедливости тождества Эйлера $f(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \ldots + x_n f_n(x)$. Так как $A \cdot x = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$, то $x^T A x = x^T (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T = f(x)$.(Отождествим одноэлементную матрицу с ее элементом.)

Таким образом, мы получили *матричное представление* квадратичной формы $f(x)$: $f(x) = x^T Ax$. Перейдем в квадратичной форме к новым переменным y. Если $x = Sy$, то $f(x) = f(Sy) = y^T(S^T AS)y = y^T By$, где $B = S^T AS$ - матрица преобразованной формы. Матрица B называется *конгруэнтной* матрице A, если найдется такая обратимая матрица S, что $B = S^T AS$.

Упр.1. Показать, что отношение конгруэнтности на $F^{n\times n}$ есть отношение эквивалентности.

Квадратичная форма $g(y)$, полученная из формы $f(x)$ путем неособенной замены переменных, называется *эквивалентной* форме $f(x)$. Матрица формы $g(y)$, эквивалентной форме $f(x)$, конгруэнтна матрице формы $f(x)$.

Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей и ранг матрицы является инвариантом умножения на обратимую матрицу слева и справа, мы имеем

Предложение. Если матрица B конгруэнтна матрице A, т.е. $B = S^T AS$, $|S| \neq 0$, то $|B| = |A| \cdot |S|^2$ и $r(B) = r(A)$.

Ранг матрицы квадратичной формы будем называть *рангом* этой формы. Эквивалентные квадратичные формы имеют один и тот же ранг.

§6.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

Пусть F - поле, характеристика которого отлична от 2, в частности, F может быть числовым полем.

Теорема 1. Для любой квадратичной формы $f(x)$ над полем F существует неособенная замена переменных $x = Sy$, которая приводит форму $f(x)$ к виду

$$f(Sy) = \varphi(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2,$$

где $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \subset F$ и r - ранг формы $f(x)$.

Доказательство(метод Лагранжа). Требуется привести к указанному в теореме виду квадратичную форму

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \ A^T = A = (a_{ik}) \in F^{n\times n}.$$

При этом возможны два случая: а) форма содержит квадрат хотя бы одного переменного; б) форма не содержит квадратов переменных.

а) Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. В этом случае форму $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = a_{11}^{-1} f_1^2 + g(x_2, \dots, x_n),$$

где g - квадратичная форма от переменных $x_2, \dots, x_n$. Введем новые переменные по формулам

$$z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$z_i = x_i, \;\; 2 \le i \le n.$$

Эта, очевидно неособенная, замена преобразует данную форму к виду

$$f(x) = a_{11}^{-1} z_1^2 + g(z_2, \dots, z_n).$$

б) Пусть $a_{11} = 0, \dots, a_{nn} = 0$, но, например, $a_{12} \neq 0$. В этом случае форму $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = 2x_1 f_1 + g(x_2, \dots, x_n).$$

Введем новые переменные по формулам

$$z_1 = x_1,$$

$$z_2 = -x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$z_i = x_i, \;\; 3 \le i \le n.$$

Эта, также неособенная, замена преобразует данную форму к виду

$$f(x) = 2z_1(z_1 + z_2) + 2a_{12}a_{13}z_1z_3 + \dots,$$

содержащему квадрат переменной z_1.

Применяя процесс (а) и в случае надобности дополняя его процессом (б), приведем данную форму $f(x)$ к сумме квадратов:

$$\varphi(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2.$$

Так как ранг квадратичной формы является инвариантом неособенной замены переменных, то число отличных от нуля коэффициентов при квадратах переменных полученной формы $\varphi(y)$ равно рангу формы $f(x)$.

Упр.1. Указать границу числа процедур типа (а) и (б), необходимых для приведения квадратичной формы от n переменных к сумме квадратов.

Симметричная матрица A из $F^{n\times n}$ является матрицей квадратичной формы $f(x)=x^TAx$. Из доказанной теоремы и закона изменения матрицы квадратичной формы при неособенной замене переменных получаем

Следствие. Для любой симметрической матрицы A из $F^{n\times n}$ найдется такая обратимая матрица S из $F^{n\times n}$, что

$$S^TAS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

где r - ранг матрицы A, $\lambda_1\neq 0,\dots,\lambda_r\neq 0$.

Квадратичную форму $\varphi(y)=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ry_r^2$, эквивалентную данной квадратичной форме $f(x)$, принято называть *каноническим видом* формы $f(x)$.

Особенности канонического вида вещественных квадратичных форм выявляет следующая

Теорема 2 (закон инерции). Пусть $\varphi(y)=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ry_r^2$ - канонический вид вещественной квадратичной формы $f(x)$. Тогда число положительных (а значит, и число отрицательных) среди коэффициентов $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не зависит от выбора неособенной замены переменных, и, таким образом, однозначно определяется исходной формой $f(x)$.

Доказательство. Допустим, что форма $f(x)$ имеет два различных канонических вида:

$$g(y)=\alpha_1y_1^2+\dots+\alpha_sy_s^2-\alpha_{s+1}y_{s+1}^2-\dots-\alpha_ry_r^2,\ \alpha_i>0,$$

$$h(z)=\beta_1z_1^2+\dots+\beta_tz_t^2-\beta_{t+1}z_{t+1}^2-\dots-\beta_rz_r^2,\ \beta_j>0,$$

причем $s<t$. Поэтому имеется такая неособенная замена $y=Sz$, что $g(y)=g(Sz)=h(z)$, $S=(\sigma_{ik})$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{11}z_1+\sigma_{12}z_2+\dots+\sigma_{1n}z_n=0\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\ \ddots\qquad\vdots\\ \sigma_{s1}z_1+\sigma_{s2}z_2+\dots+\sigma_{sn}z_n=0\\ z_{t+1}=0,\ \dots,\ z_n=0\end{array}\right\}.$$

Число уравнений в этой системе $s+(n-t)=n-(t-s)$ меньше числа неизвестных. Поэтому она имеет ненулевое решение $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_t,\zeta_{t+1}=0,\dots,\zeta_n=0)$. Найдем $\eta=S\zeta$. Из равенства $g(\eta)=g(S\zeta)=h(\zeta)$ имеем

$$-\alpha_{s+1}\eta_{s+1}^2-\dots-\alpha_r\eta_r^2=\beta_1\zeta_1^2+\dots+\beta_t\zeta_t^2.$$

Так как $\alpha_i > 0$ и $\beta_j > 0$, $\eta_i^2 \geq 0$, $\zeta_j^2 \geq 0$, то $\zeta_1 = 0, \ldots, \zeta_t = 0$, что противоречит построению этих чисел. Теорема 2 доказана.

Пусть π - число положительных, υ - число отрицательных среди коэффициентов канонического вида формы $f(x)$. Число $\sigma = \pi - \upsilon$ называют сигнатурой формы $f(x)$. Так как $r = \pi + \upsilon$, то ранг r и сигнатура σ однозначно определяют числа π и υ.

Отметим еще одну важную особенность приведения вещественных квадратичных форм к каноническому виду, связанную со специфическим выбором новых переменных. Линейная замена переменных называется *ортогональной*, если матрица этой замены ортогональна. Пусть задана вещественная квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$, $A^T = A \in R^{n \times n}$. Нам известно, что для вещественной симметрической матрицы A найдется такая ортогональная матрица S, что

$$S^{-1}AS = A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - корни характеристического многочлена матрицы A. Введем новые переменные y по формуле $x = Sy$, тогда

$$f(x) = (Sy)^T A(Sy) = y^T(S^T AS)y = y^T A_0 y = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2,$$

так как $S^T = S^{-1}$. Тем самым нами доказана

Теорема 3(о приведении к главным осям). Для любой вещественной квадратичной формы $f(x)$ найдется такая ортогональная замена переменных $x = S \cdot y$, что преобразованная форма $f(Sy)$ имеет следующий канонический вид:$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - корни характеристического многочлена матрицы формы $f(x)$.

§6.3. Положительно определенные вещественные квадратичные формы

Вещественная квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$, $A \in R^{n \times n}$ называется *положительно определенной*, если для любого ненулевого столбца $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ из R^n $f(\xi) > 0$.

Теорема 1. Если квадратичная форма $f(x)$ является положительно определенной, то всякая форма, ей эквивалентная, также положительно определенна.

Доказательство. Пусть квадратичная форма $g(y)$ эквивалентна форме $f(x)$. Это значит, что имеется такая замена переменных $x = S \cdot y$, $S \in R^{n\times n}$ и $|S| \neq 0$, что

$$f(x) = f(Sy) = g(y).$$

Если форма $g(y)$ не является положительно определенной, то найдется такой ненулевой столбец η из R^n, что $g(\eta) \leq 0$. Очевидно, столбец $\xi = S \cdot \eta$ также ненулевой и $f(\xi) = g(\eta) \leq 0$. А это противоречит определенности формы $f(x)$.

Следствие 1. Для того чтобы квадратичная форма $f(x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее каноническом виде $\varphi(y) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$ все коэффициенты α_i были положительными.

Следствие 2. Если вещественная квадратичная форма $x^T Ax$ является положительно определенной, то ее дискриминант $|A|$ положителен.

Квадратной матрице $A = (a_{ik})$ сопоставим последовательность миноров

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

Эти миноры называют *угловыми* минорами A.

Лемма Якоби. Пусть $f(x) = x^T Ax$ - произвольная квадратичная форма над полем F характеристики $\neq 2$ и $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$. Тогда существует такая замена переменных $x = S \cdot z$ с унитреугольной матрицей S :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, -$$

что преобразованная квадратичная форма $\psi(z) = f(Sz)$ имеет вид $\psi(z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$, где $\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $1 \leq k \leq n$, $\Delta_0 = 1$ (формула Якоби).

Доказательство проведем индукцией по числу переменных в форме. База индукции очевидна,так как $f(x) = a_{11}x_1^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}x_1^2$. Пусть для всех форм с числом переменных $< n$ наше утверждение доказано и $f(x)$ - форма от n переменных. Запишем исходную форму в виде

$$f(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2,$$

выделив все слагаемые $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$, зависимые от переменных $x_1,\ldots,x_{n-1}$. По индуктивному предположению найдется такая замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & \tau_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

которая преобразует форму $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ в форму $\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_{n-1}y_{n-1}^2$. Формулы (13) дополним равенством $x_n = y_n$ и полученной заменой преобразуем данную форму $f(x)$. В результате получим форму

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}y_{n-1}^2 + 2b_{1n}y_1y_n + \ldots + 2b_{n-1n}y_{n-1}y_n + b_{nn}y_n^2.$$

Запишем эту форму следующим образом:

$$f(x) = \lambda_1(y_1 + \lambda_1^{-1}b_{1n}y_n)^2 + \ldots + \lambda_{n-1}(y_{n-1} + \lambda_{n-1}^{-1}b_{n-1n}y_n)^2 + \mu y_n^2,$$

где $\mu_n = b_{nn} - (\lambda_1^{-1}b_{1n})^2 - \ldots - (\lambda_{n-1}^{-1}b_{n-1n})^2$. Введем новые переменные $z_i = y_i + \lambda_i^{-1}b_{in}y_n$, $1 \leq i \leq n-1$, $z_n = y_n$. Эта замена переменных вместе с ранее построенной приводит данную форму к виду

$$f(x) = \psi(z) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}z_{n-1}^2 + \mu_n z_n^2.$$

Так как последовательное выполнение двух унитреугольных замен является унитреугольной, то осталось показать, что $\mu_n = \lambda_n$. Дискриминанты преобразованной формы и исходной связаны соотношением $\lambda_1,\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}\mu_n = 1^2\cdot|A| = \Delta_n$. Отсюда получаем, что $\mu_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \lambda_n$. Лемма доказана.

Теорема 2(критерий Сильвестра положительной определенности вещественной квадратичной формы). Для того чтобы квадратичная форма

$$f(x) = x^TAx,\ A^T = A \in R^{n\times n}$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\Delta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ угловых миноров матрицы A выполнялись неравенства

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Доказательство. Достаточность условий, приведенных в теореме, непосредственно следует из леммы Якоби. Установим их необходимость. Положительная определенность данной формы $f(x)$ влечет положительную определенность "усеченных" форм:

$$f^S(x) = \sum_{i=1}^{S} \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_i x_k, \ 1 \le s \le n.$$

Поэтому дискриминант Δ_S формы $f^S(x)$ по следствию 2 к теореме 1 положителен. Критерий Сильвестра доказан.

Упр.1. Показать, что из положительности последовательных угловых миноров $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ вещественной симметрической матрицы A следует положительность всех главных миноров A.

§6.4. Пары форм

Пара квадратичных форм $g_1(x)$ и $g_2(x)$ называется *эквивалентной* паре $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если найдется такая неособенная замена переменных $x = S \cdot y$, что

$$f_1(Sy) = g_1(y), \ f_2(Sy) = g_2(y).$$

Естественно для пары форм $f_1(x)$ и $f_2(x)$ найти такую замену, которая одновременно преобразует каждую из форм данной пары к наиболее простому виду. Мы рассмотрим важную задачу о совместном приведении двух вещественных квадратичных форм к сумме квадратов.

Теорема. Для любой пары вещественных квадратичных форм $f(x) = x^T Ax$ и $\varphi(x) = x^T Bx$, из которых $\varphi(x)$ - положительно определенная, найдется такая замена переменных $x = Pz$, что

$$f(Pz) = \alpha_1 z_1^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2, \ \varphi(Pz) = z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с точностью до порядка следования определяются однозначно данными формами $f(x)$ и $\varphi(x)$ и не зависят от вида замены переменных.

Доказательство. Так как квадратичная форма $\varphi(x)$ положительно определенна, то найдется такая замена переменных $x = Sy$, что $\varphi(Sy) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$. Матрица $C = S^T AS$ - симметрическая, поэтому найдется такая *ортогональная* матрица U, что

$$U^{-1}CU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} = C_0.$$

Покажем, что замена $x = Pz$, где $P = S \cdot U$, является искомой. Для этого вычислим матрицы форм $f(Pz)$ и $\varphi(Pz)$:

$$P^T AP = U^T(S^T AS)U = U^T CU = C_0$$

$$P^T BP = U^T(S^T BS)U = U^T EU = E.$$

Таким образом,

$$f(Pz) = \alpha_1 z_1^2 + \ldots + \alpha_n z^n = g_1(z)$$

$$\varphi(Pz) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = h_1(z).$$

Предположим, что наряду с построенной заменой $x = Pz$ имеется другая $x = Qy$, приводящая пару форм $f(x)$ и $\varphi(x)$ к виду

$$\beta_1 y_1^2 + \ldots + \beta_n y_1^2 = g_2(y),\ y_1^2 + \ldots + y_n^2 = h_2(z).$$

Построим замену $z = Vy$, где $V = P^{-1}Q$. Очевидно $g_1(Vy) = g_2(y)$ и $h_1(Vy) = h_2(y)$. Следовательно, матрицы этих форм связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} V, E = V^T EV.$$

Отсюда множества $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ и $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ совпадают как корни одного и того же характеристического многочлена. Что и требовалось.

Задачи

1. Квадратичную форму $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x_i x_j$, $a_i \in F$ привести к каноническому виду и найти соответствующую замену переменных.

2. Показать, что число классов эквивалентных квадратичных форм от n переменных над полем C равно $n+1$, а над полем R равно C_{n+1}^2.

3. Доказать, что для любой положительно определенной формы $f(x) = x^T Ax$ найдется такая обратимая вещественная матрица S, что $A = S^T S$ и обратно.

4. Замена переменных $x = Sy$ называется унитреугольной, если

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что замена $y = S^{-1}x$ также унитреугольна. Показать, что угловые миноры матрицы A квадратичной формы $f(x) = x^T Ax$ при унитреугольной замене переменных не меняются.

5. Доказать, что для того, чтобы квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$ ранга r унитреугольной заменой переменных можно было привести к виду

$$\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_r y_r^2,$$

где $\alpha_k \neq 0$, $1 \leq k \leq r$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k \neq 0$, если $k \leq r$, и $\Delta_k = 0$, если $k > r$. При этом коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ определяются формой $f(x)$ однозначно и находятся по формуле

$$\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \; 1 \leq k \leq r, \; \Delta_0 = 1.$$

6. Вещественная квадратичная форма $f(x)$ называется *отрицательно определенной*, если для любого ненулевого столбца $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ из R^n, $f(\xi) < 0$. Доказать, что квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$, $A^T = A \in R^{n \times n}$ тогда и только тогда является отрицательно определенной, когда знаки угловых миноров $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы Δ чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

7. Вещественная квадратичная форма $g(x)$, называется *ортогонально-эквивалентной* форме $f(x)$, если найдется такая ортогональная замена переменных $x = Sy$, что $f(Sy) = g(y)$. Доказать, что для ортогональной эквивалентности двух форм необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

8. Вещественную симметрическую матрицу A назовем положительно определенной, если квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$ положительно определена. Доказать, что для любой положительно определенной матрицы A найдется такая положительно определенная матрица B, что $B^2 = A$.

9. Доказать, что всякая вещественная обратимая матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и положительно определенной матрицы.

Литература

[1] *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. М.,1974.

[2] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.,1967.

[3] *Ланкастер Р.* Теория матриц. М.,1978.

[4] *Кострикин А.И.,Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.,1986.

[5] *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.,1973.

[6] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре М.,1984.

[7] *Тышкевич Р.И.,Феденко А.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск,1968.

[8] *Фаддеев Д.К.Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.,1977.

[9] *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.,1969.

[10] *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.,1984

[11] *Шилов Г.Е.* Конечномерные линейные пространства. М.,1969.

[12] Сборник задач по алгебре/Под ред. А.И.Кострикина.М.,1987.

Основные обозначения

$\{x, x \in A; P(x)\}$	— множество всех тех элементов из A, которые обладают свойством P
F^n	— пространство n-мерных строк (или n-мерных столбцов) с координатами из поля F
$F^{m \times n}$	— пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля F

$A \vdash B$	— каждый элемент из множества B есть линейная комбинация элементов из A
$M = M_1 \dot{+} M_2$	— M - прямая сумма подпространств M_1 и M_2
$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$	— линейная оболочка системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$
$\dim X$	— размерность линейного пространства X
A^T	— матрица,транспонированная к A
$\|A\|, detA$	— определитель квадратной матрицы A
$E(E_{n,n})$	— единичная матрица (размером $n \times n$)
$0(0_{m,n})$	— нулевая матрица (размером $m \times n$)
$H(X, Y)$	— пространство линейных отображений из X в Y
$X_{\mathcal{A}}$	— ядро
$\mathcal{A}X$	— область значений отображения $\mathcal{A}$
$\dim X_{\mathcal{A}} = d_{\mathcal{A}}$	— дефект, $\dim \mathcal{A}X = r_{\mathcal{A}}$ -ранг линейного отображения $\mathcal{A}$
$\varphi_A = \|A - \lambda E\|$	— характеристический многочлен матрицы A
$M^{\perp}$	— ортогональное дополнение к подмножеству M унитарного или евклидова пространства
$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)$	— определитель Грама системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$
$\mathcal{A}^*$	— отображение, сопряженное с отображением $\mathcal{A}$
$\left.\begin{matrix}(\mathcal{A}x, x) - (x, b) \\ -(b, x) + \gamma\end{matrix}\right\}$	— функционал ошибки оператора $\mathcal{A}$ из $H(X)$, $b \in X,\ \gamma \in R$
$\Phi_0(x) = \|\mathcal{A}x - b\|^2$	— функционал невязки
$\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*b$	— нормальное уравнение для уравнения $\mathcal{A}x = b$, $\mathcal{A} \in H(X, Y),\ x \in X,\ b \in Y$
$\Phi_\alpha(x) = \|\mathcal{A}x - b\|^2 + {}+\alpha^2\|x\|^2$	— регуляризирующий функционал
$(\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha^2\mathcal{E})x = {}= \mathcal{A}^*b$	— регуляризованное нормальное уравнение для уравнения $\mathcal{A}x = b$
$\mathcal{A}^+$	— отображение из Y в X, псевдообратное к отображению $\mathcal{A}$ из X в Y
$A = TDS^*$	— сингулярное разложение матрицы A из $C^{m \times n}$; S и T – унитарные матрицы, D – диагональная матрица с сингулярными числами матрицы A по диагонали
ОНБ	— ортонормированная база
Упр.	— упражнение